Tours de trinques

Année 2022 – 2023

Antonin Chemin, Rose-Eva Colombat, Line Signoret , Fanny Soupizet, élèves en classe de terminale

Établissement : Lycée Jean Puy (Roanne)

Enseignantes : Christine Gotte, Laurie Martinelli

Chercheur : Frédéric Chardard, Université Jean Monnet, St Etienne

Présentation du sujet

Un groupe de n personnes se réunit dans un bar. Après avoir commandé leurs boissons elles ont pour objectif de trinquer une fois avec chacun le plus vite possible. Mais deux règles leurs sont imposées :

- elles ont interdiction que leurs bras se croisent quand elles trinquent.
- elles ne pourront trinquer qu'avec une seule personne à la fois.

Par conséquent elles devront procéder à plusieurs « tours de trinques », pour qu'elles puissent toutes trinquer avec tout le monde.

Le problème est de déterminer combien il faut de tours de trinques au minimum.

Résultats

En notant n le nombre de personnes qui souhaitent trinquer, nous avons démontré que :

- Le nombre total de trinques à réaliser est $n(n-1)/2$.
- Dans le cas où n est impair, la solution optimale est donnée par n tours de trinques avec $(n-1)/2$ trinques à chaque tour.
- Dans le cas où n est pair et supérieur à 2, la solution optimale est donnée par n tours de trinques.

1. Définitions

Nous avons commencé par définir quelques mots :

→ Trinque : un choc entre deux verres de deux personnes.

→ Tour de trinque : C'est un temps durant lequel plusieurs personnes réalisent une trinque avec une autre en respectant les règles.

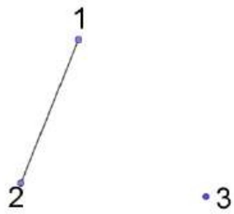
On appelle n le nombre de personnes du groupe, $n \in \mathbb{N}$.

2. Premiers exemples

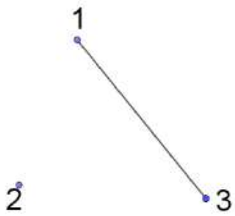
Pour commencer nous avons essayé avec des petits groupes :

Deux personnes : $n = 2$, évident il faut un tour de trinque

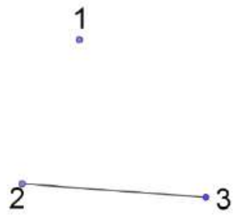
Trois personnes : $n = 3$, Il n'y en a que 2 qui peuvent trinquer en même temps donc il faudra 3 tours de trinque.



1er tour



2e tour



3e tour

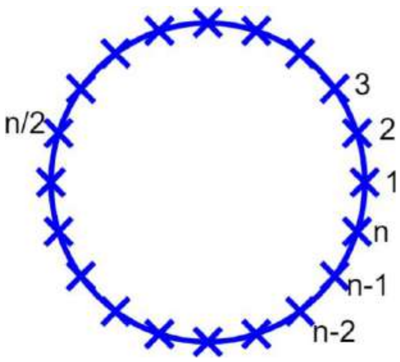
Première remarque : dans le cas d'un nombre impair de personnes, à chaque tour 1 personne ne peut pas trinquer car chaque trinque implique deux personnes.

Nous avons fini par trouver un lien entre tous les tours et le nombre de tours de trinques nécessaires. En effet le nombre de tours minimums semble correspondre au nombre de personnes n (excepté le cas $n = 2$ qui nécessite seulement un tour).

Conjecture : Pour un groupe de n personnes, le nombre de tours de trinques minimum est n.

3. Quelques formules

Pour rendre l'expérience plus lisible, nous avons décidé de représenter la situation en plaçant les n personnes en cercle en les numérotant de 1 à n dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (ceci n'a aucune incidence sur la résolution du problème) et ceci pour $n \geq 3$.



a) <u>Déterminons le nombre de trinques total</u>

C'est une combinaison de 2 éléments pris parmi n donc il y en a $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.
On peut aussi raisonner en disant que le nombre de trinques total est donné par :

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

On note n le nombre de personnes autour de la table.

Or nous avons comptabilisé 2 fois chaque trinque entre deux personnes (ex : 1 trinque avec 3 et 3 avec 1) donc il faut diviser par 2.

Chaque personne doit trinquer avec toutes les autres donc n personnes doivent trinquer avec $(n-1)$ personnes ce qui fait $n(n-1)$ trinques.

Remarque : C'est aussi $(n-1)+(n-2)+\cdots+0$ (la première personne trinque avec les $(n-1)$ autres, la deuxième doit trinquer avec les $(n-2)$ qui restent, etc.

b) <u>Déterminons le nombre de trinques maximum par tour</u>

Pour le cas n pair : il y a $n/2$ trinques possibles par tour car une trinque associe 2 personnes parmi les n.

Pour le cas n impair : il y a $(n-1)/2$ trinques possibles par tour car une trinque associe 2 personnes parmi les n donc il y en aura une à chaque tour qui ne pourra pas trinquer.

c) <u>Déterminons alors le nombre de tours minimum</u>

On peut donc en déduire :

Pour le cas n pair : on divise le nombre de trinques total par le nombre maximum de trinques par tour, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)/2}{n/2} = n-1$ donc **dans le cas n pair, il faudra au minimum $n-1$ tours.**
Pour le cas n impair : $\frac{n(n-1)/2}{(n-1)/2} = n$ donc **dans le cas n impair, il faudra au minimum n tours.**

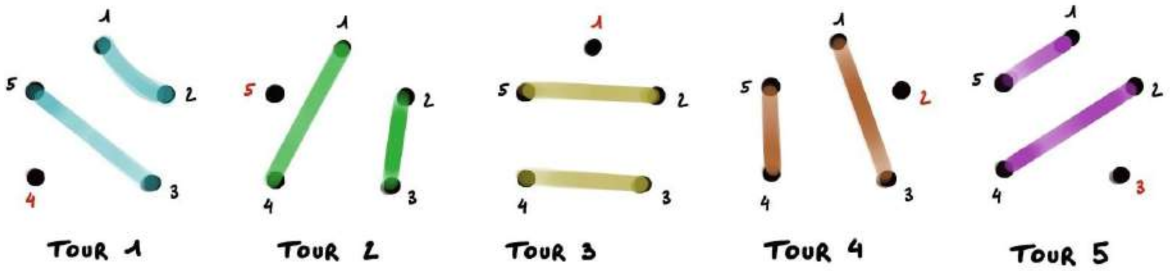
4. Est-ce réalisable ? Et comment ?

<u>A.</u> Cas d'un nombre de personnes impair : $n = 2p+1$, p entier naturel.

<u>Objectif</u> : essayer de faire des tours qui comportent $p = \frac{n-1}{2}$ trinques.
Dans nos exemples précédents, nous avons vu que cela était possible pour $n = 3$ personnes.

<u>Illustrations pour $n = 5$</u>

On a une solution optimale car chaque tour comporte 2 trinques donc il faut 5 tours.



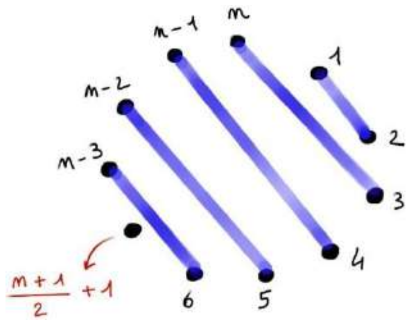
Cette proposition est une solution optimale car chaque tour comporte $(n-1)/2 = 2$ trinques. Et au

total on a $5 \times 2 = 10$ trinques ce qui correspond au nombre total de trinques $n(n-1)/2$.
On déduit qu'il faut $n = 5$ tours minimum pour que tout le monde trinque.

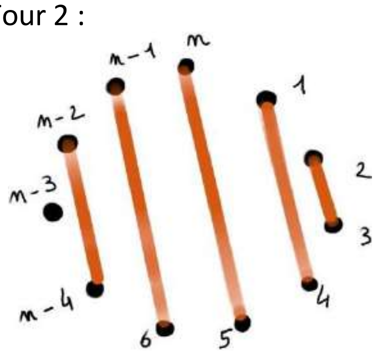
Nous avons remarqué que le procédé employé pour cet exemple peut être généralisé pour tout autre exemple du cas n impair.

Illustration tour 1 et tour 2 pour n = 11

Tour 1 :



Tour 2 :



Pour chaque couple de trinque : On soustrait un à la première personne du couple et on ajoute 1 à la deuxième personne du couple sachant que l'on passe de n à 1.

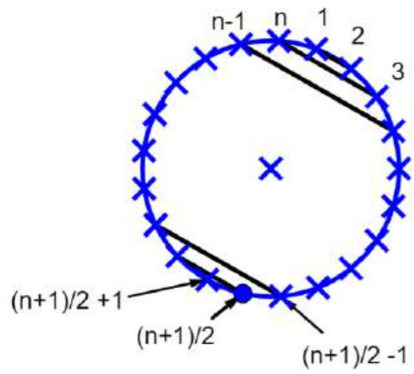
Trinques :

Tour n°1	Tour n°2
$(1\ ;\ 2)$	$(2\ ;\ 3)$
$(n\ ;\ 3)$	$(1\ ;\ 4)$
$(n-1\ ;\ 4)$	$(n\ ;\ 5)$
$(n-2\ ;\ 5)$	$(n-1\ ;\ 6)$
$(n-3\ ;\ 6)$	$(n-2\ ;\ 7)$

On continue ainsi pour les tours suivants jusqu'à ce que n trinque avec 1.

<u>Dans le cas général pour n impair</u>, il y aura toujours, pour **le premier tour** les trinques suivantes :

$(1\ ;2)$
$(n\ ;3)$
$(n-1\ ;4)$
$(n-2\ ;5)$
$(n-3\ ;6)$
…
Jusqu'aux numéros : $((n+1)/2) + 2;\ (n+1)/2))$



Au tour suivant, les couples de trinques s'obtiennent à partir des couples de trinques du premier tour en ajoutant 1 à chaque numéro et en remplaçant $n+1$ par 1.
Puis, on recommence. Ainsi les couples de trinques du tour $k+1$ s'obtiennent à partir des couples de trinques du tour k en ajoutant 1 à chaque numéro et en remplaçant $n+1$ par 1.

On a donc au total n tours avec $(n-1)/2$ trinques à chaque tour ce qui est la solution optimale. (1)

On a créé un programme python pour modéliser cela, qui montre comment trinquer pour n personnes, lors d'un tour quelconque tour demandé. (2)

```python
from math import*
n=int(input("entrez le nombre de personnes présentent au bar:"))
print ("il y aura alors,",n,"tours de trinques")
t=int(input('entrez le numéro du tour souhaité compris entre 1 et n:'))
N=int(((n-1)/2)+1)
V=(t)
U=(1+t)
W=int(((n+1)/2)+1) # on défini celui qui ne trinquera avec personne
print("pour le tour n°",t,":")

for k in range(1,N):
    if V>n:
        V=V-n
    if U>n:
        U=U-n
    if U==0 :# si u tombe a 0 on redémarre avec u = n
        U=n
    if V==0 :# si v tombe a 0 on redémarre avec v = n
        V=n
    if W>n:
        W=W-n
    if W==0 :# si w tombe a 0 on redémarre avec w = n
        W=n

    print(U,"trinque avec",V)
    V=V-1
    U=U+1
    W=W+1

print(W,"ne trinquera avec personne durant ce tour!")
print("il vous reste encore",n-t,"tours pour que tout le monde ait trinqué avec tout le monde.")
```

Résultat du programme pour $n = 11$:

```
>>> (executing file "programme impair BON.py")
entrez le nombre de personnes présentent au bar: 11
il y aura alors, 11 tours de trinques
entrez le numéro du tour souhaité compris entre 1 et n: 9
pour le tour n° 9 :
10 trinque avec 9
11 trinque avec 8
1 trinque avec 7
2 trinque avec 6
3 trinque avec 5
4 ne trinquera avec personne durant ce tour!
il vous reste encore 2 tours pour que tout le monde ait trinqué avec tout le monde.
```

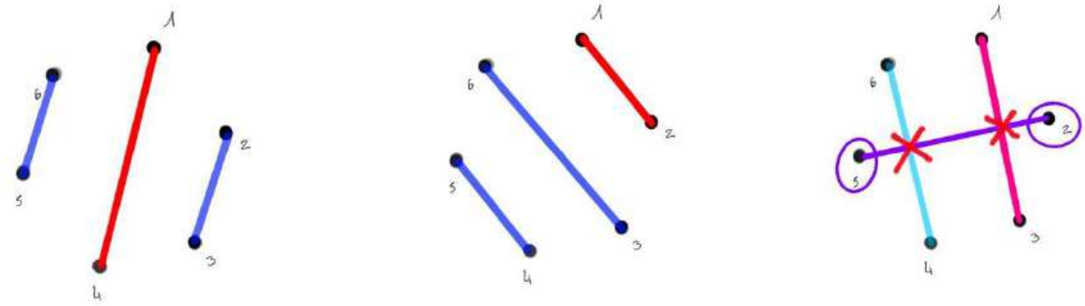
B. Cas d'un nombre de personnes pair : $n = 2p$, p entier naturel .

Nous avons conjecturé sur nos exemples qu'il fallait n tours minimum pour n personnes, or nous avons démontré que le nombre de tours minimum possible est $n - 1$.
Il va donc falloir prouver qu'on ne peut pas réaliser toutes les trinques en $n - 1$ tours.

Ce nombre de tours de trinques $n - 1$ n'est pas réalisable à cause de l'interdiction de croiser les bras : il faudra donc rajouter un tour de plus. En effet, quand la personne 1 trinque avec la 2, les autres peuvent toutes trinquer ensemble, de même quand la 1 trinque avec la 4,…. (cf illustrations ci-dessous).

Par contre quand la personne 1 trinque avec la personne 3 (ou avec 5) il est impossible à tous de trinquer ensemble car des bras vont se croiser. Pourquoi ?

Car le nombre de personnes qui séparent le 1 et le 3 (ou le 1 et le 5) est impair et donc ils ne peuvent pas former un ou des couples de trinques, car il faudrait un nombre pair de personnes. Ainsi la personne seule devra trinquer avec quelqu'un avant le 1 ou après le 3 (ou le 5) ce qui l'obligerait a croiser les bras avec le couple $(1; 3)$, ce qui n'est pas autorisé.



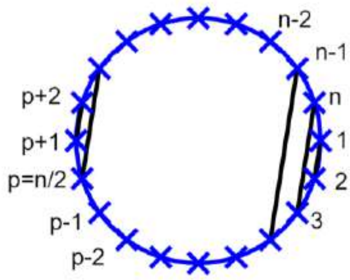
Ainsi il faut n tours au minimum pour réaliser les trinques lorsque le groupe contient un nombre pair de participants : prouvons qu'on peut le réaliser.

Voici comment se passeront les premiers tours :

a) <u>Pour les tours $\leq n/2$:</u>

On optimise avec à chaque tour $p = n/2$ <u>trinques</u> ce qui est le nombre de trinques maximum :

Tour 1 :



→ Couples de trinque :

$(1;\ 2)$
$(n\ ;\ 3)$
$(n\ -\ 1\ ;\ 4)$
….

Dernier : $(\frac{n}{2} + 2\ ;\ \frac{n}{2} + 1)\ =\ (p + 2\ ;\ p + 1)$

Tour 2 :

Pour savoir quels couples de personnes trinquent ensemble on rajoute 1 aux couples de trinque du tour 1.

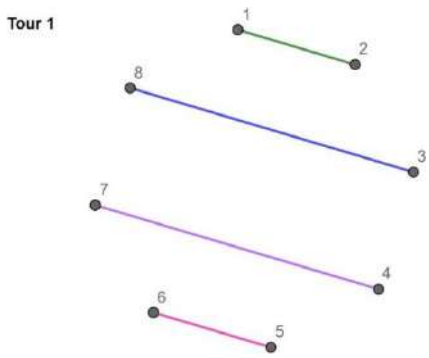
<u>Attention</u> : Lorsque c'est à n que l'on rajoute 1, ce n'est pas $n + 1$ mais on le remplace par 1 car celui qui est à côté de n c'est 1.

→ Couples de trinques :

a) $(2\ ;\ 3)$
b) $(1\ ;\ 4)$
c) $(n\ ;\ 5)$
……

Dernier : $\left(\frac{n}{2} + 3; \frac{n}{2} + 2 = (p + 3; p + 2\right)$

Exemple : pour $n = 8$ ($p = 4$)



Les personnes poursuivent leurs tours de trinques du 1^er^ tour jusqu'au $\frac{n}{2} = p$-ième tour en suivant la méthode décrite précédemment.

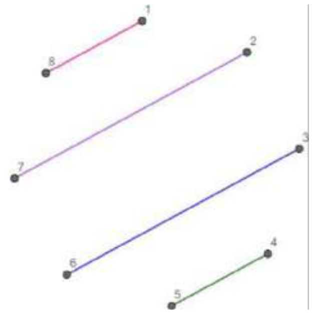
Bilan : Pour k entier entre 1 et $p-1$, les couples de trinques du tour $(k + 1)$ s'obtiennent à partir des couples de trinques du tour k en ajoutant 1 à chaque numéro et en remplaçant $n+1$ par 1.

On arrive au denier tour : Tour $\frac{n}{2} = p$:

→ Couples de trinques :

$$\left(\frac{n}{2} = p\,;\, p+1\right)$$
$$(p-1\,;\, p+2)$$
.....

Dernier : $(1\,;\, n)$



Exemple pour $n = 8$ ($p = 4$) : **Tour 4 :**

Bilan : Le nombre de trinques total lors de cette première partie est : le nombre de trinques par tour multiplié par le nombre de tours, soit $n/2 \times n/2 = n^2/4$.

b) <u>Pour les tours $> n/2$:</u>

On choisit la personne n° 1, elle et la personne $p+1$ qui ne trinqueront pas.
Il n'y aura donc que $\frac{n}{2} - 1 = p - 1$ trinques à chaque tour.

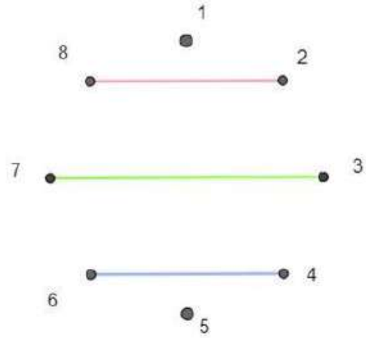
Tour $\frac{n}{2} + 1 = p + 1$:

→ $p-1$ couples de trinques
→ couples de trinques :

$$(2\,;\, n)$$
$$(3\,;\, n-1)$$
...

Dernier $\left(\frac{n}{2}; \frac{n}{2} + 2\right)$ soit $(p\,;\, p+2)$

Exemple pour $n = 8$ ($p = 4$) :



Ce sera 1 et 5 qui ne trinqueront pas pour le tour 5.

Ensuite, pour les couples qui trinquent on prend $1+1$ et $1-1$ que l'on remplace par n, donc 2 et n. Puis pour les autres on rajoute 1 à l'un et on soustrait 1 à l'autre.

Tour $\frac{n}{2} + 2 = p + 2$.

Ensuite au tour suivant, pour savoir quels couples de personnes trinquent ensemble, on rajoute 1 auxcouples de trinque du tour précédent. Et cela à chaque fois qu'on change de tour.

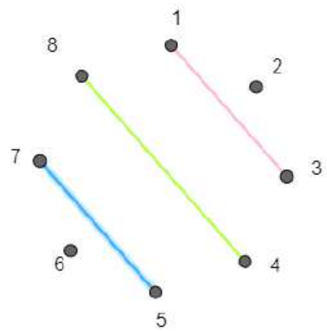
Attention : Lorsque c'est à n que l'on rajoute 1, ce n'est pas $n+1$ mais on le remplace par 1 car celui qui est à côté de n c'est 1.

On obtient ainsi les couples suivants :

$$(3; 1)$$
$$(4\,;\, n)$$
...

Dernier $(\frac{n}{2} + 1; \frac{n}{2} + 3)$ soit $(p+1;\, p+3)$

Exemple pour $n = 8$ ($p = 4$) :



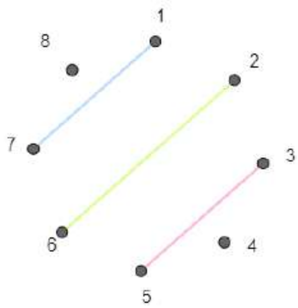
Les personnes poursuivent leurs tours de trinques du tour $p+1$ jusqu'au n-*ième tour* en suivant la méthode décrite précédemment.

Bilan : Pour k entier entre $p+1$ et n, les couples de trinques du tour $k+1$ s'obtiennent à partir des couples de trinques du tour k en ajoutant 1 à chaque numéro et en remplaçant $n+1$ par 1.

Dernier tour (Tour n) :

On obtient ainsi les couples suivant :

$(p+1; p-1)$
$(p+2; p-2)$
…
Dernier $(n-1; 1)$



Exemple pour $n = 8$ ($p = 4$) :

Bilan : Lors de cette deuxième partie, le nombre de trinques est le nombre de tours multiplié par le nombre de trinques par tour, or dans cette partie il y a $n/2 - 1$ trinques par tour, soit en tout $(n/2)(n/2 - 1)$ qui nous donne après simplification : $n\,(n-2)/\,4$ trinques.

Bilan final : on a fait $n/2 + n/2 = n$ tours et $n^2\,/\,4$ trinques puis $n\,(n-2)/\,4$, soit $(n^2\ -2n)/\,4$ trinques, qui nous donne $n^2/\,4 + (n^2 - 2n)/\,4$, soit, après simplification, le nombre de trinques attendues : $n(n-1)\,/2$.
Chacune des trinques étant différente, on a donc illustré le fait qu'on pouvait faire n tours de trinques et que c'était le nombre de tours minimum dans le cas ou n est pair.

En effet, on peut vérifier facilement que 1 trinque avec tout le monde. Il trinque d'abord avec 2, 4, 6,…,$2p$, puis avec 3, 5,…, $2p-1$.

On peut raisonner de même pour les autres personnes.
On a donc créé un autre programme pour modéliser cette deuxième méthode, qui montre comment trinquer pour n personnes, lors d'un quelconque tour demandé. (3)

```python
from math import*
n=int(input("entrez le nombre de personnes présentent au bar ( nombre pair ICI) :"))
print ("il y aura alors,",n,"tours de trinques ")
t=int(input("entrez le numéro du tour souhaité compris entre 1 et n :"))
print("pour le tour n°",t,":")

if t<=n/2:
    u=t
    v= u+1
    for k in range(1,int(n/2)+1): # a chaque tour, il y a n/2 trinques à afficher
        if u==0: # si u tombe a 0 on redémarre avec u = n
            u=n
        if v>n:  # si v dépasse n on redémarre avec à v = 1
            v=1
        print (u,"trinque avec",v)
        u=u-1
        v=v+1

else:
    u=int(t-n/2) # met en format entier (integer)
    v=u+2
    for i in range(1,int(n/2)):
        if u==0: # si u tombe a 0 on redémarre avec u = n
            u=n
        if v>n:  # si v dépasse n on redémarre avec à v = 1
            v=1 # a chaque tour, il y a n/2 trinques à afficher
        print(u,"trinque avec",v)
        u=u-1
        v=v+1
```

```
>>> (executing file "cas_pair_.py")
entrez le nombre de personnes présentent au bar ( nombre pair ICI) :8
il y aura alors, 8 tours de trinques
entrez le numéro du tour souhaité compris entre 1 et n : 5
pour le tour n° 5 :
1 trinque avec 3
8 trinque avec 4
7 trinque avec 5

>>>
```

5. Conclusion

Nous tenons à remercier M. Chardard et nos enseignantes pour nous avoir accompagnés cette année dans l'atelier MATh.en.JEANS. Nous avons été ravis de participer au congrès de fin d'année à Grenoble ce qui a permis de donner une autre dimension à notre travail.

Notes d'édition

(1) Ce qui est démontré ici est qu'il y aura bien le bon nombre de trinques mais il n'est pas clair que certaines ne se répètent pas. Pour montrer que tout le monde a bien trinqué avec tout le monde, il faudrait ajouter un petit argument comme cela est fait dans le cas pair à la page 8.

(2) Il y a quelques lignes inutiles dans ce code.

(3) Attention, dans ce code les tours sont décalés par rapport à leur description dans le texte. Pour les retrouver dans le même ordre, Il faudrait remplacer la ligne 20 par u=int(t-n/2)-1.