Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

« Say what you see ! »

suite de Conway

Année 2021 – 2022

Clémentine Duport (classe de première)

Établissement : Lycée Ferdinand Buisson (Voiron) jumelé avec le collège Le Grand Som (Saint-Laurent-du-Pont)

Encadré par : Laurent JOANNIC

Chercheur : Éric DUMAS

1. Présentation de notre sujet : la suite de Conway

Notre sujet se nomme « Say what you see » ou suite de Conway.
On nous a donné le début d'une suite de nombres et nous devions observer ce qu'il s'y passe.
Le début de la suite de nombres est :
1
11
21
1211

Après avoir compris comment la suite de nombres s'écrivait, nous l'avons continuée :
1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211
31131211131221
13211311123113112211
11131221133112132113212221
3113112221232112111312211312113211
1321321321112131221123113112221131112211 31221
11131211131211131211131122211213213221133122211 3112211
311311123113111231131112311321322112111312111322212311322113212221

Chaque ligne s'obtient en regardant puis en lisant à voix haute la ligne précédente. Par exemple, à la première ligne il est écrit 1, je le lis « une fois 1 » c'est à dire « un 1 ». J'écris donc à la seconde ligne 11. Et je répète le procédé...

2. Résultats et conjectures

Voici les résultats de ce que nous avons prouvé sur la suite de Conway.

- Chaque ligne de la suite de Conway se termine par le premier chiffre de la suite, noté * (1).

exemple pour * > 1:

*
1*
1 11*
311*
13211*
111312211*
…

exemple pour * = 1:

1	(1 chiffre à cette ligne)
11	(2 chiffres à cette ligne)
21	(2 chiffes à cette ligne)
1211	(4 chiffes à cette ligne)
111221	(6 chiffes à cette ligne)
…	

- Le nombre de chiffres dans chaque ligne est pair sauf dans la première ligne.

- Il ne peut pas y avoir de chiffre supérieur ou égal à 4 dans les lignes formant la suite de Conway, à part quand * ≥ 4 (dans ce cas, ce n'est qu'au bout des lignes qu'il y a un chiffre supérieur ou égal à 4).

exemple pour * = 4:

4
14
1114
3114
132114
1113122114
…

exemple pour * = 1:

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
…

- La longueur des lignes est croissante.

Toutefois, nous n'avons pas prouvé tout ce que nous avons observé. Voici nos conjectures.
- Avec * = 1, à partir de la quatrième ligne incluse, chaque ligne se termine alternativement par 211 et par 221.
- À partir de la huitième ligne incluse, chaque ligne commence par 111, la suivante par 311, celle encore après par 132, puis de nouveau 111, 311, 132 et ainsi de suite…

À vous de le prouver !

3. Notre travail cette année

3.1. Comment travailler sur la suite de Conway ?

Pour travailler sur la suite de Conway, nous avons donné trois définitions, dont une qui est la définition même de la suite de Conway.

On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une suite de chaînes de caractères (qui sont des chiffres). Cette suite est la suite de Conway. On note L_n la longueur de U_n.
Soit * un chiffre, U_0 est la chaîne de caractères n'ayant qu'un seul caractère, *.
Pour chaque $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\{1;\dots;L_n\}$, on note $C_k^{(n)}$ le $k^{\text{ième}}$ caractère de U_n.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$

- Je définis la suite (U_n) par
  U_0 = * (* possède qu'un unique caractère)
  U_{n+1} = ce qu'on dit à voix haute en lisant U_n.
- Je définis la suite $(C_k^{(n)})$ avec $1 \le k \le L_n$ et n fixe > 0 par
  $C_k^{(n)} = k^{\text{ième}}$ caractère de U_n en partant de la gauche.
- Je définis la suite (L_n) par
  L_n = nombre de caractères composant U_n = la longueur de U_n.

exemple pour * > 1:

à cette ligne n = 0

*
1*
111*
311*
13211*
111312211*
31121122211*
1321122131211*
…

Ce qui est entouré en rose est le début de la suite (U_n).

Ce qui est entouré en jaune est un terme de la suite (U_n), soit une chaîne de caractères, U_n.

Parmi les termes de la suite (U_n), il est y en a un qui particulier. Il s'agit du premier terme entouré en bleu que l'on note U_0 soit *.

Ce qui est entouré en vert sont des exemples de caractères de la suite $(C_k^{(n)})$:
- le terme en vert clair se note $C_1^{(2)}$
- le terme en vert foncé se note $C_2^{(7)}$.

3.2. Première proposition

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, U_n se termine par * .

Preuve :

Montrons, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ *, la proposition* $P(n)$ *: « U_n se termine par * ».*

<u>Initialisation</u>
*Le dernier symbole de U_0 est le symbole de départ, soit * .*
D'où $P(0)$.

<u>Hérédité</u>
S'il existe un entier $n \ge 0$ tel que $P(n)$: « U_n se termine par » . (HR)*
*Comme U_{n+1} s'obtient en écrivant ce qu'on dit à voix haute en lisant U_n et que U_n s'achève par *, alors $P(n{+}1)$.*

Conclusion
On a ainsi $P(0)$ et pour tout $n \geq 0$, $P(n) => P(n+1)$, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.2. Seconde et troisième propositions

Pour tout $n > 0$, L_n est toujours paire.
De plus, $C_k^{(n)} < 4$ sauf si $* \geq 4$.
C'est à dire si $* \in \{0;1;2;3\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{1;...;L_n\}$, on a $C_k^{(n)} \in \{0;1;2;3\}$.

Preuve :

Montrons, par récurrence sur n entier non nul, la proposition $P(n)$: « U_n ne contient pas de chiffre supérieur ou égal à 4, sauf, éventuellement en dernière position. En outre, L_n est paire. ».

Initialisation :
*Si U_0 = * alors U_1 = 1*.*
D'où $P(1)$.
Hérédité :
Supposons qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $P(n)$: « U_n ne contient pas de chiffre supérieur ou égal à 4, sauf éventuellement en dernière position. En outre, L_n est paire. ». (HR)

Par la manière de construire U_{n+1} en lisant U_n, U_{n+1} est composé de N_k et de S_k.

$$U_{n+1} = N_1\, S_1\, N_2\, S_2 \ldots N_k\, S_k\, N_{k+1}\, S_{k+1}\, N_{k+2}\, S_{k+2} \ldots N_{\ldots}\, *$$

avec, pour tout k, S_k différent de S_{k+1}.
Dans U_{n+1}, N_k est le nombre de caractères S_k qui dans U_n étaient consécutifs et identiques.

Par hypothèse de récurrence, tous les S_k sont des chiffres strictement inférieurs à 4. Donc, ils sont constitués d'un seul caractère.

Montrons, par l'absurde, que les N_k sont eux aussi strictement inférieurs à 4 et par conséquent constitués d'un seul caractère.

Si N_k est supérieur ou égal à 4 dans U_{n+1}, cela signifie que dans U_n il existe quatre caractères identiques et consécutifs.
Ces quatre caractères identiques sont soit $N_k\, S_k\, N_{k+1}\, S_{k+1}$, soit $S_k\, N_{k+1}\, S_{k+1}\, N_{k+2}$.
Seulement, par hypothèse de récurrence, S_k est différent de S_{k+1}.
Ainsi, il ne peut pas y avoir de N_k supérieur ou égal à 4.

Donc, U_{n+1} est composé de paires de chiffres inférieurs à 4 (2).
Et ainsi, L_{n+1} est paire.

Conclusion :
On a ainsi $P(0)$ et pour tout $n \geq 0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.3. Quatrième proposition

(L_n) est croissante.

Preuve :

Pour lire un terme de (U_n), on le décompose en succession de « blocs » (singletons, paires ou triplets) de caractères successifs et identiques, où les caractères formant les extrémités des « blocs » sont différents des caractères formant les extrémités des « blocs » autour.

Dans la construction de U_{n+1} à partir de U_n ,
- un singleton (un caractère isolé) devient une paire de caractères (augmentant L_{n+1} de 1 par rapport à L_n)
- une paire de caractères identiques et consécutifs reste une paire de caractères (pas forcément identiques) (pas d'impact sur L_{n+1} par rapport à L_n)
- un triplet (3 caractères identiques consécutifs) devient une paire de caractères (diminution de 1 de L_{n+1} par rapport à L_n).
Afin de prouver que (L_n) est croissante, démontrons que $L_{n+1} \geq L_n$ sachant que pour tout $n>0$ L_n est paire.
Pour prouver cela, il suffit de montrer que le nombre de singletons dans U_n est supérieur ou égal au nombre de triplets dans U_n.

- *Cas où U_n ne possède aucun triplet : la propriété est forcément vérifiée.*
- *Cas où U_n a exactement un triplet :*

Comme L_n est pair, U_n doit compter un nombre impair de singletons, donc au moins un.
Ainsi quand U_n a 1 triplet, U_n a au minimum 1 singleton.
Donc, dans le cas où U_n a 1 triplet, le nombre de singletons dans U_n est au minimum égal au nombre de triplets dans U_n.

- *Cas où U_n a deux ou plus de deux triplets :*

Dans $C_k^{(n)}$ (avec k le plus grand possible), k est pair car L_n est pair.
De plus, le premier et le dernier caractères de n'importe quel triplet est à k impair (3).
Il existe donc un nombre impair de caractères entre deux triplets de U_n ; mais aussi entre le dernier triplet de U_n (en partant de la gauche) exclu jusqu'à la fin de U_n incluse.
Ces deux types d'espaces peuvent être composés soit de singletons, soit de paires de caractères identiques et consécutifs. Or ils contiennent un nombre impair de caractères, donc ils contiendront obligatoirement au moins 1 singleton.
Ainsi quand U_n a au moins 2 triplets, U_n a au minimum 2 singletons.
Donc, dans le cas où U_n a au moins 2 triplets, le nombre de singletons dans U_n est au moins égal au nombre de triplets dans U_n.

Ainsi, dans tous les cas, le nombre de singletons dans U_n est supérieur ou égal au nombre de triplets dans U_n.
De plus, rappelons que dans la construction de U_{n+1} à partir de U_n :
- un singleton (un caractère isolé) devient une paire de caractères (augmentant L_n de 1)
- une paire de caractères identiques et consécutifs reste une paire de caractères (pas forcément identiques) (pas d'impact sur L_{n+1})
- un triplet (3 caractères identiques consécutifs) devient une paire de caractères (diminution de 1 de L_n).
Ainsi, $L_{n+1} \geq L_n$. (L_n) est croissante.

4. Conclusion

Nous remercions : le chercheur Éric DUMAS, notre professeur de mathématiques Laurent JOANNIC, les professeures Annabelle JOANNIC et Mme MAITRE pour nous avoir accompagné(e)s au congrès de MATh.en.JEANS, ainsi que l'association MATh.en.JEANS.

Notes d'édition

(1) On considère toutes les suites obtenues de la même manière à partir d'un seul chiffre, noté *.

(2) Sauf éventuellement le dernier, qui est toujours *.

(3) En écrivant $U_n = N_1 \, S_1 \ldots \, N_k \, S_k \, N_{k+1} \, S_{k+1} \ldots N_{\ldots}$ *, comme S_{k+1} est toujours différent de S_k, un triplet ne être que l'un des $N_k \, S_k \, N_{k+1}$ et commence donc à un rang impair.