La Fractale

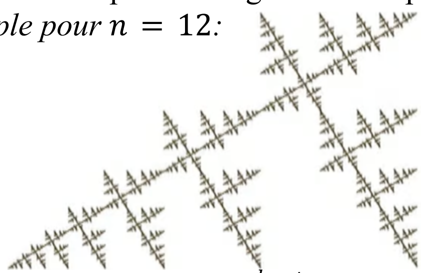
2023

Charles de Belloy, Alban Kasriel 1ère A

Etablissement: Lycée Français de San Francisco
Enseignant: Nicolas Legatelois
Chercheur: Gilles Bailly Maitre

Énoncé: En prenant une figure de base inconnu, on répète n fois une étape: faire tourner de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre une copie de la figure de l'étape avant et la coller à une copie de la figure de l'étape avant en alignant le bas des figures.

Exemple pour $n = 12$*:*



Trouver les proportions ($\frac{hauteur}{longueur}$) de la figure, la figure de base et la proportion entre le nombre de segments au-dessus et en dessous de la grande diagonale.

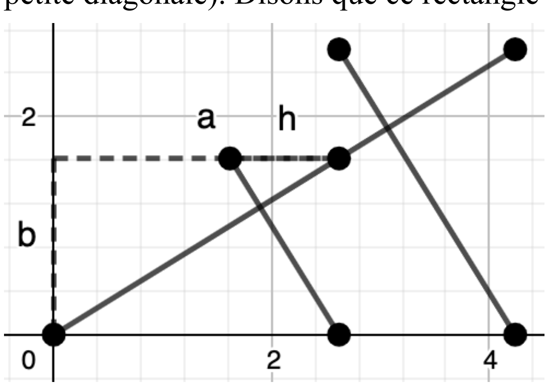
Résultats:

Les proportions ($\frac{hauteur}{longueur}$) $= \Phi - 1$.

Pour deux segments en croix comme figure de base, la proportion de segments au-dessus et en dessous de la diagonale est $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{v_{n-1}+u_{n-2}}{u_{n-1}+2v_{n-2}+u_{n-2}-k_{n-2}}$, avec u_n le nombre de segments au-dessus de la diagonale, v_n le nombre de segments en dessous et k_n la suite de fibonacci mais avec 1 comme les trois premiers termes.

Pour un carré comme figure de base, la proportion d'aire au-dessus et en dessous de la diagonale est $\frac{1}{2}$.

1. A chaque étape, nous avons les deux segments les plus grands qui forment une croix dans un rectangle (le segment le plus grand sera appelé grande diagonale, et le deuxième plus grand petite diagonale). Disons que ce rectangle est de longueur a et de hauteur b (voir figure).



Appelons la distance entre le point ou le plus petit des deux segments atteint le haut du rectangle et le sommet en haut à droite h.

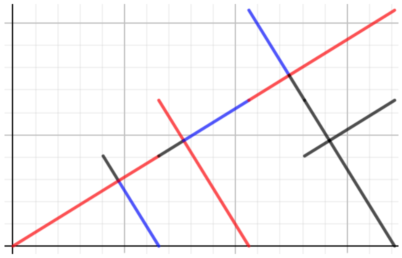
Pour faire que la grande diagonale soit une ligne droite, il faut que le segment de pente $\frac{b}{a}$ soit perpendiculaire au segment de pente $\frac{-b}{h}$, parce que le

segment de pente $\frac{-b}{h}$ est tourner de $\frac{\pi}{2}$ pour s'aligner avec cette grande diagonale.
Cela veut dire que $\frac{b}{a} = -\frac{1}{\frac{-b}{h}}$, donc que $b^2 = ah$

En plus, pour que la diagonale soit continue, il faut qu'à chaque étape, la partie ajoutée à la grande diagonale commence au même point que là où se termine la diagonale. Donc $b = a - h$, parce que le sommet en haut à droite de la grande diagonale est a une hauteur de b, et la continuation de la diagonale est à une hauteur de $a - h$.
Nous avons donc:
$b^2 = ah = (a - h)^2$
$a^2 - 3ah + h^2 = 0$
$a = \frac{3h \pm \sqrt{9h^2 - 4h^2}}{2} = \frac{3h \pm h\sqrt{5}}{2}$
$h \geq 0$, $a > 0$ et $b > 0$ parce que ce sont des distances (donc positives) et parce que a et b ne peuvent pas être nul sinon la figure n'existe pas
Donc, $3h > h\sqrt{5}$, et vu que $a > 0$, $a = \frac{3h + h\sqrt{5}}{2}$ (parce que a serait négatif si $a = \frac{3h - h\sqrt{5}}{2}$)
$b = a - h = \frac{3h + h\sqrt{5}}{2} - h = \frac{h + h\sqrt{5}}{2}$
Les proportions ($\frac{hauteur}{longueur}$) sont donc $\frac{\frac{h + h\sqrt{5}}{2}}{\frac{3h + h\sqrt{5}}{2}} = \frac{h + h\sqrt{5}}{3h + h\sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \Phi - 1.$
Ces proportions sont les mêmes à chaque étape, vu qu'à chaque étape nous avons cette même croix de base qui doit suivre les deux mêmes formules (même si plus n est grand et plus il y a de segments attachés à la croix), donc la proportionnalité reste la même mais les longueurs non.

1.1. En répétant la figure, il y a un certain nombre de segments au-dessus et en dessous de cette grande diagonale.
Un point est au-dessus de la diagonale si le point sur la diagonale avec la même abscisse à une ordonnée inférieur que celle du point et le point est en dessous si l'ordonnée est supérieure.
Un segment est donc au-dessus de la diagonale si tous ses points le sont, et en dessous sur tous ses points le sont.
Un segment qui est en partie au-dessus et en partie en dessous de la grande diagonale sera compté comme deux segments différents, l'un au-dessus et l'autre en dessous.

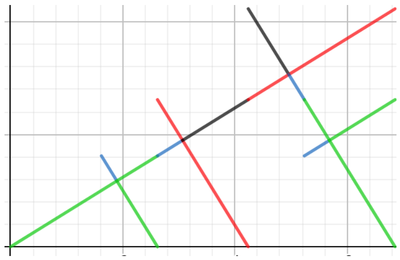
Appelons v_n le nombre de segments au-dessus de la grande diagonale et u_n le nombre de segments en dessous de la diagonale après n répétitions ($n = 0$ correspond à la figure de base).
A chaque étape, v_n sera égal à la somme du nombre de segments au-dessus de la grande diagonale l'étape d'avant (soit v_{n-1}) et le nombre de segments au-dessus de la grande diagonale pour la partie de la figure ajouté à l'étape n (soit $v_n - v_{n-1}$). Hors, $v_n - v_{n-1} = u_{n-2}$ parce qu'après deux répétitions, les segments en-dessous de la grande diagonale à $n - 2$ répétitions sont maintenant retournés deux fois, donc au-dessus de la grande diagonale.



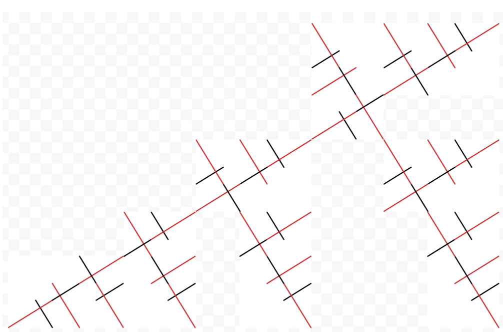
Comme on le voit dans la figure (qui représente la figure de base et les prochaines deux étapes), tout ce qui serait en dessous du segment rouge (donc grande diagonale) serait au-dessus après deux rotations. A cette troisième étape, $v_3 = 3$ parce que

$v_n = v_{n-1} + u_{n-2}$

De la même manière, u_n sera égal à la somme de u_{n-1} et de $u_n - u_{n-1}$.



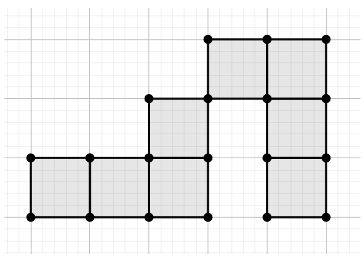
Hors, (comme l'on peut le voir dans la deuxième figure), $u_n - u_{n-1}$ correspond à tout ce qu'il y a sous le segment rouge, soit la figure entière à l'étape $n - 2$ ainsi que v_{n-2} (le segment bleu). C'est le cas parce que la partie ajoutée de la grande diagonale à l'étape n correspond à la petite diagonale à l'étape $n - 1$.
Par contre, il faut définir en termes de u_n et de v_n la figure à l'étape $n - 2$. La grande diagonale ne doit pas être comptés, parce qu'elle formera qu'un seul segment avec le segment principal de v_{n-1} (celui qui est en bleu et qui sera là à n'importe quelle étape, sachant qu'il y a des segments pas représentés ici qui seront ajoutés au fur et à mesure des répétitions). Donc, la figure à l'étape $n - 2$ sera égale à $u_{n-2} + v_{n-2} - k$, où k est le nombre de segments qui forment un seul segment des deux côtés de la diagonale (dans la figure, vu qu'elle est au plus simple, $u_{n-2} = 1$ et $v_{n-2} = 1$, même si au total ils ne formeraient qu'un segment, par contre s'il y avait d'autres segments perpendiculaires à la grande diagonale ils ne seraient pas comptés deux fois).
k est donc égal au nombre de segments qui croisent la grande diagonale à l'étape $n - 2$.



A chaque étape, la grande diagonale sur la partie de la figure qui est ajouté est coupé par tous les segments qui coupent la grande diagonale de la figure deux étapes avant (parce que la grande diagonale c'est retourné de fois donc les segments se retrouvent sur la grande diagonale à l'envers). Sachant qu'à l'étape 0 et à l'étape 1 il n'y a qu'un seul segment qui coupe la grande diagonale, nous pouvons donc décrire la valeur de k à l'étape n par $\sum_{i=0}^{n-2} k_i$. Pour le simplifier, imaginons que l'on passe de k_n à k_{n+1}: $k_n = k_0 + k_1 ... + k_{n-2}$ et $k_{n+1} = k_0 + k_1 ... + k_{n-2} + k_{n-1}$, donc $k_{n+1} = k_n + k_{n-1}$, ce qui correspond à la suite de fibonacci (mais les trois premiers termes doivent valoir 1 parce qu'ils ne peuvent pas être simplifiés de la même manière vu qu'ils ont un ou moins de termes dans la somme). Donc, $u_n = u_{n-1} + 2v_{n-2} + u_{n-2} - k_{n-2}$

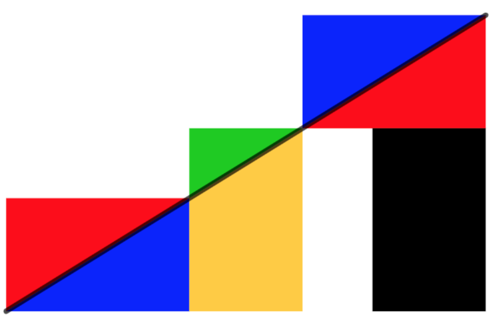
La proportion de segments au-dessus et en dessous de la diagonale à un point sera: $\frac{v_n}{u_n} = \frac{v_{n-1}+u_{n-2}}{u_{n-1}+2v_{n-2}+u_{n-2}-k_{n-2}}$, soit $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n}$.

2. Une autre manière d'approcher le problème serait d'utiliser une figure plutôt que des segments. Cette figure peut aussi être faite avec un carré comme figure de base.
Trouver les proportions $\frac{hauteur}{longueur}$ revient donc à trouver vers quelle valeur tend la pente de notre figure. Appelons c la longueur du côté du carré, h_n la hauteur et l_n la longueur (où $h_0 = l_0 = c$).



A chaque étape n, $l_n = l_{n-1} + h_{n-1}$ vu que l'ancienne hauteur est retournée pour être ajoutée à la longueur. A l'étape n, $h_n = l_{n-1}$ parce que l'ancienne longueur est retournée pour devenir la nouvelle hauteur. C'est le cas parce que $l_n \geq h_n$ vu qu'ils commencent identique et que la longueur augmente de $l_{n-1} + h_{n-1}$ alors que la hauteur peut soit augmenter à l_{n-1} ou rester à h_{n-1}.
Les proportions $\frac{hauteur}{longueur}$ sont donc $\frac{h_n}{l_n} = \frac{l_{n-1}}{l_{n-1}+l_{n-2}} = \frac{1}{1+\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}} = \frac{1}{1+\frac{h_{n-1}}{l_{n-1}}}$.
La pente tend vers $\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{l_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{h_{n-1}}{l_{n-1}}$, donc vers $\frac{h_n}{l_n} = \frac{1}{1+\frac{h_n}{l_n}}$ ce qui donne $\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{l_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \Phi - 1$ (sachant que la pente doit être positive).

2.1. Ensuite, il faut trouver vers quoi tend le ratio $\frac{a}{b}$ entre l'aire a au-dessus et l'aire b en dessous de la diagonale formée entre le point en bas à gauche et le point en haut à droite. Vu que l'on cherche une limite, $\frac{h_n}{l_n} = \Phi - 1$ peut être considéré comme étant toujours le cas (la diagonale reste la même). A chaque étape, toute la figure peut être inscrite dans un rectangle avec cette même diagonale.



Dans la figure (qui représente cette limite avec les proportions constantes) donc, la partie coloré au-dessus de la diagonale ne représente pas véritablement l'aire de la figure au-dessus de la grande diagonale, mais plutôt englobe (et donc représente) cette aire.
Nous voyons donc qu'après 2 répétitions, $a_n = a_{n-1} + b_{n-2}$ (vu que l'aire en dessous de la diagonale à l'étape $n - 2$ repasse au-dessus à l'étape n et il faut compter l'aire au-dessus l'étape d'avant) et $b_n = b_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-2}$ (parce que toute la figure de l'étape $n - 2$ passe en dessous de la diagonale à l'étape n, ainsi que l'aire au-dessus de la figure à l'étape $n - 2$, et il faut compter l'aire en dessous de l'étape d'avant).

Nous cherchons donc $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$ sachant que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ (la limite est demandée donc elle existe). A chaque étape, l'aire totale double, donc si $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers un nombre fixe où $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ et $a_n + b_n = 2(a_{n-1} + b_{n-1})$,

alors $a_n = 2a_{n-1}$ et $b_n = 2b_{n-1}$ sera vérifié à la limite pour que cette fraction donne le même résultat. Donc:

$a_n = a_{n-1} + b_{n-2} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{4} \leftrightarrow \frac{a_n}{2} = \frac{b_n}{4} \leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$, soit $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$.