

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

# Escaliers de kaplas et autres digressions

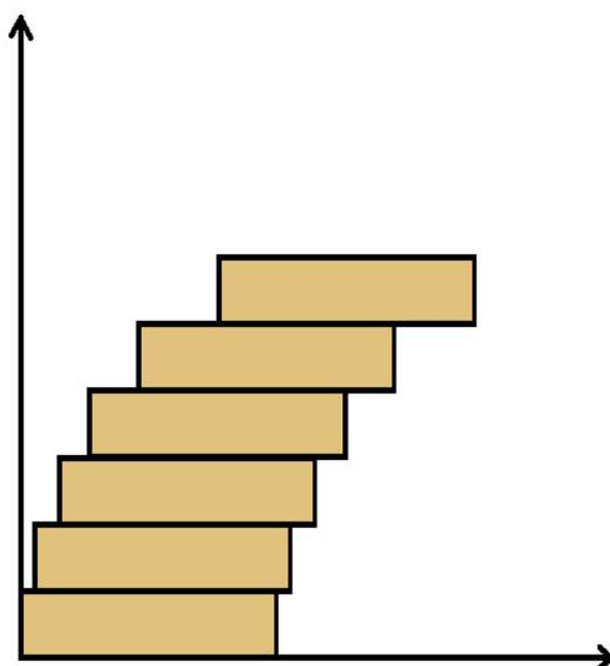
Année 2022-2023

Raoul Sitbon, Salomé Delfosse et Nathan Rimoux,  
en collaboration avec le lycée de Rumilly

Établissement : Lycée Charles Baudelaire, Annecy

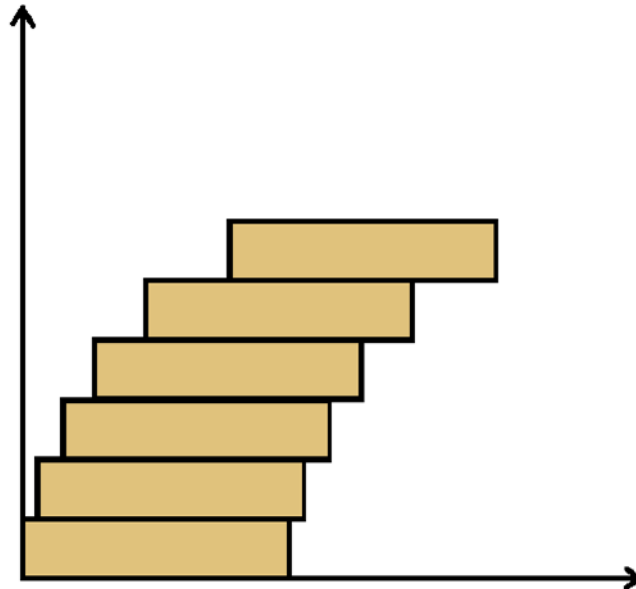
Enseignantes : Elisabeth Dauvier et Claire Castillon-Lemettais

Chercheur : Jimmy Garnier, CNRS et Université de Savoie



## Introduction au sujet

Notre but au long de l'année était de définir, pour un escalier de kapla composé d'un kapla par étage, tous exactement identiques et placés dans un espace idéalisé, une distance maximale qu'il était possible d'atteindre dans le vide (illustration ci dessous) et ce en optimisant au maximum notre structure.



## 1) Présentation des résultats

Cet article se concentre essentiellement sur la présentation du résultat final obtenu en fin d'année ainsi que sur la présentation de quelques démonstrations annexes nécessaires (ou non) à la démonstration principale.

Ce même résultat dont il est question dans les lignes qui suivent nous permet d'affirmer la possibilité complètement théorique de construire un escalier de kaplas s'étendant à une longueur infinie au dessus du vide.

Sur ce, bonne lecture.

## 2) Définition

En tout premier lieu, il nous faut préciser la nature des kaplas utilisés, partons du principe que nous avons un modèle de kapla idéalisé avec une masse et un volume qui ne change pas d'un kapla à un autre. Chaque kapla est similaire en tout point à tous les autres kaplas composant l'escalier. Procédons ensuite à quelques définitions :

Avancement : distance d'un kapla à un autre, cette distance est prédéfinie pour la construction de l'escalier et peut varier ou non entre chaque kapla, il est à noter que la distance maximale possible pour l'avancement est de  $1/2$  longueur de kapla (Cf : preuve en fin d'article).

Centre de gravité : le centre de gravité d'un kapla unique est un point toujours situé au croisement de ses diagonales, soit en plein milieu du kapla.

Barycentre : centre de gravité de l'ensemble des kaplas composant l'escalier.

**2.1)** Pour les définitions qui suivent, il nous est nécessaire d'établir certaines choses :

Prenons un plan orthonormé d'origine  $O$  et avec pour valeur unitaire une longueur de kapla, donc 1 unité dans le plan équivaut à 1 longueur de kapla. Maintenant, supposons que nous placions le premier kapla de notre escalier collé à droite de l'axe des ordonnées à une coordonnée  $y$  infinie [1] (cela aide pour le confort visuel et la modélisation), nous rajoutons les kaplas composant l'escalier par le dessous du premier kapla en respectant l'avancement prédéfini et numérotons chaque kapla en fonction de son rang d'apparition dans l'escalier. En dessous de notre escalier se trouvera toujours un kapla dit « fantôme », qui est placé en respectant l'avancement défini mais dont la présence n'impacte en rien la structure, son centre de gravité n'entre pas en compte, il est placé ici uniquement pour faciliter les calculs (on peut considérer qu'il est le kapla en contact avec la surface sur laquelle repose notre escalier), notre escalier au rang 1 est donc composé du kapla fantôme et d'un kapla normal.

A partir de là notre objectif est de déterminer pour tout rang de l'escalier le centre de gravité de l'ensemble de la structure et de l'optimiser pour que l'escalier soit le plus long possible.

**2.2)** Définissons pour cela les objets suivants :

$b_k$  = coordonnée en abscisse du barycentre de la structure .

$b_{k+1}$  = coordonnée abscisse du barycentre de la structure au rang suivant. [2]

$x_k$  = coordonnée en abscisse du centre de gravité du dernier kapla normal de l'escalier , soit le kapla situé au dessus du kapla fantôme.

$x_{k+1}$  = coordonnée en abscisse du centre de gravité du prochain kapla individuel à apparaître dans l'escalier toujours en respectant l'avancement prédéfini.

### **Avancement entre deux kaplas**

$L_k$  = terme dont la signification est comparable à celle de l'avancement, il représente l'écart entre le kapla  $k$  et le kapla  $k + 1$ .

On rappelle que chaque kapla est numéroté en fonction de son rang d'apparition dans l'escalier, donc  $L_1$  correspond à l'écart entre le premier kapla de l'escalier et le kapla 2 situé juste en dessous.

### **Contrainte de non effondrement**

Maintenant, il nous faut définir la notion de contrainte, en effet, il est logique que l'abscisse du barycentre ne puisse dépasser une certaine valeur sans que l'escalier ne s'effondre.

Prenons un escalier de kapla quelconque avec un nombre de kapla  $k$  et une coordonnée en abscisse du barycentre de valeur  $b_k$ , pour que la structure soit stable il faut impérativement que la valeur  $b_k$  soit inférieure ou égale à l'abscisse du bord du kapla fantôme, en d'autres termes le projeté orthogonal du barycentre sur l'axe des abscisses ne doit pas dépasser le projeté orthogonal (sur l'axe des abscisses) du bord du kapla à la base de la structure.

On en déduit la **contrainte de non effondrement** suivante :

$$b_k \leq x_k + 0.5,$$

mais nous y reviendrons plus tard.

$c_k$  = coordonnée en abscisse de la contrainte .

$c_{k+1}$  = coordonnée en abscisse de la contrainte au rang suivant

Les termes du sujet étant maintenant défini, il nous reste, avant de pouvoir passer à la preuve en elle-même, à définir les formules qui se rattachent à chacun de ces termes.

### 3) Définition des formules

Premièrement, la formule de l'abscisse du barycentre que l'on peut mettre sous forme de suite de récurrence une fois appliquée à notre escalier de kaplas, cette dernière correspond à une moyenne pondérée des centres de gravité individuels de chacun de nos kaplas :

$$b_1 = x_1 = 0.5$$
$$b_{k+1} = \frac{k \cdot b_k + x_{k+1}}{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N} \neq 0 \quad [3]$$

La formule de  $x_k$  est assez facile à déterminer puisqu'il s'agit de calculer l'abscisse du centre de gravité du kapla se situant au dessus du kapla fantôme au rang  $k$  pour ce faire, il nous suffit de prendre la valeur de  $x_k = 0.5$  et de lui soustraire la somme des avancements  $L_n$  (excepté l'avancement entre du kapla  $k$  au kapla fantôme) ; on obtient donc la formule suivante :

$$x_k = 0.5 - \sum_{n=1}^{k-1} L_n ; \quad \forall k \in \mathbb{N} \neq 0$$

De cette formule on déduit  $x_{k+1}$  :

$$x_{k+1} = 0.5 - \sum_{n=1}^k L_n ; \quad \forall k \in \mathbb{N} \neq 0$$

Il est à noter qu'il est assez facile de trouver une formule de  $x_{k+1}$  en fonction de  $x_k$  mais que cette dernière n'étant absolument pas nécessaire pour la démonstration qui suit, nous ne la définirons pas ici .

**3.1)** Il nous faut maintenant définir les formules concernant la contrainte de la structure à chaque rang. Cette dernière correspondant à l'abscisse du bord droit du kapla à la base de la structure, elle peut être calculée en prenant l'abscisse du centre de gravité de ce même kapla (soit la formule de  $x_{k+1}$ ) et en lui ajoutant 0.5.

On définit donc  $c_{k+1}$ , la contrainte au rang suivant et  $c_k$  la contrainte au rang actuel. [4]

$$c_{k+1} = 0.5 - \sum_{n=1}^{n=k+1} L_n + 0.5 ; \quad \forall k \in \mathbb{N} \neq 0$$
$$c_k = 0.5 - \sum_{n=1}^{n=k} L_n + 0.5 ; \quad \forall k \in \mathbb{N} \neq 0$$

Nous avons à présent toutes les cartes en main pour passer à la résolution du problème en lui même.

### 4) Résolution du problème

Pour rappel, notre objectif est de construire l'escalier de kapla le plus long possible, il nous faut donc déterminer un avancement optimal, c'est à dire une suite d'avancement  $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , permettant à la structure d'avancer sans s'effondrer, cependant cet avancement prédéfini se doit de respecter quelques conditions pour en faire l'avancement idéal :

- 1/2 longueur de kapla étant l'écart maximal d'un kapla à un autre, notre avancement prédéfini se doit d'avoir 1/2 comme premier terme.
- On part du principe que  $L_{k+1}$  est forcément plus petit que  $L_k$ , puisque l'utilisation d'un avancement variable croissant au lieu de décroissant utilisant la somme des inverses des entiers naturels pairs donnerait lieu à la présence d'une infinité de  $L_k$  tendant vers 0 dès le début de l'escalier, ce qui n'est pas souhaitable.

- L'avancement le plus optimisé nous donnerait logiquement un barycentre toujours égal à la contrainte.
- D'un point de vue plus spéculatif, s'il existe un avancement qui permettrait à notre escalier d'atteindre une longueur infinie, alors ce dernier se doit de diverger.

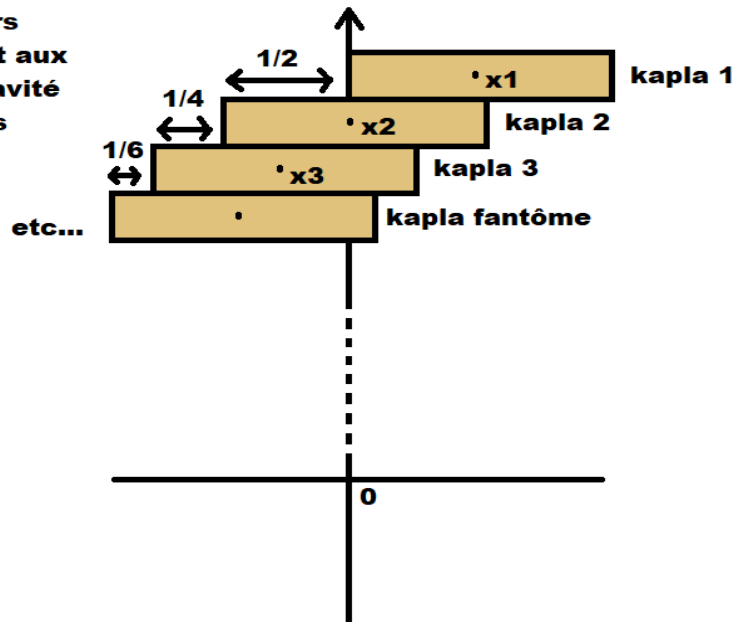
Après réflexion, une série de termes semble respecter chacune de ces contraintes : la somme de l'inverse des entiers naturels pairs notée  $0.5 \cdot S_n$  (où  $S_n$  est la série harmonique). En effet cette série diverge, commence par  $1/2$ , a des termes décroissants et semble être toujours égale à la valeur du barycentre quand on l'applique à la contrainte.

On précise tout de même que la divergence de la série n'est en soit qu'un plus, puisque si elle est optimisée, c'est qu'elle est déjà la plus efficace possible pour notre escalier, nous apportant ainsi une réponse au problème indépendante de la divergence ou non de la série en question.

On note qu'avec cette série l'écart situé derrière un kapla  $k$  peut se calculer simplement avec la formule suivante :

$$L_k = \frac{1}{2 \cdot k} \forall k \in \mathbb{N} \neq 0$$

**les points noirs  
correspondent aux  
centres de gravité  
de chacun des  
kaplas.**



**4.1)** On cherche donc à prouver que pour tout  $k$  avec la somme des inverses des entiers naturels pairs comme avancement prédéfini, la contrainte est toujours égale au barycentre, c'est à dire, avec :

$$L_k = \frac{1}{2k} \forall k \in \mathbb{N} \neq 0; c_k = b_k \forall k \in \mathbb{N} \neq 0$$

Cela revient à conjecturer que  $b_k = c_k \forall k \in \mathbb{N} \neq 0$ , où :

$$c_k = 0.5 - \sum_{n=1}^{n=k} \left(\frac{1}{2n}\right) + 0.5 = x_{k+1} + 0.5$$

$$c_{k+1} = 0.5 - \sum_{n=1}^{n=k+1} \left(\frac{1}{2k}\right) + 0.5 = x_{k+1} - \frac{1}{2(k+1)} + 0.5$$

$b_k$  est défini par

$$b_1 = 0.5$$

$$b_{k+1} = \frac{k \cdot b_k + x_{k+1}}{k+1}$$

et

$$x_{k+1} = 0.5 - \sum_{n=1}^{n=k} \left( \frac{1}{2n} \right)$$

le tout  $\forall k \in \mathbb{N} \neq 0$

Cela peut être démontré en utilisant le raisonnement par récurrence :

On pose  $\forall k \in \mathbb{N} \neq 0$  la propriété  $b_k = c_k$ .

Initialisation :

On a déjà posé précédemment  $b_1 = 0.5$ , il nous reste à le vérifier pour la contrainte :

$$c_1 = 0.5 - \frac{1}{2 \cdot 1} + 0.5$$

$$c_1 = 0.5$$

Donc l'initialisation est vérifiée et la propriété posée précédemment est vraie au premier rang.

Hérédité :

Pour  $k \in \mathbb{N} \neq 0$  quelconque : on montre que notre hypothèse de récurrence  $b_k = c_k$  passe au rang  $k+1$  quand elle est vérifiée, c'est à dire  $b_{k+1} = c_{k+1}$ .

En utilisant notre hypothèse de récurrence, on remplace  $b_k$  par  $c_k$  dans la formule de  $b_{k+1}$  puis on développe :

$$b_{k+1} = \frac{k \left( x_{k+1} + \frac{1}{2} \right) + x_{k+1}}{k+1}$$
$$b_{k+1} = \frac{2k \cdot x_{k+1} + k + 2 \cdot x_{k+1}}{2k+2}$$

Or si l'on prend le temps de développer la formule de  $c_{k+1}$  posée précédemment, on se rend compte que les deux sont égales :

$$c_{k+1} = x_{k+1} - \frac{1}{2(k+1)} + 0.5$$
$$c_{k+1} = \frac{2k \cdot x_{k+1} + k + 2 \cdot x_{k+1}}{2k+2}$$

(Je laisse la liberté au lecteur de vérifier la véracité de ce développement).

On a donc ici la preuve de l'hérédité, nous permettant d'affirmer que  $\forall k \in \mathbb{N} \neq 0$ , la somme des inverses des entiers naturels pairs est l'avancement optimal, de plus, cette somme étant divergente, notre escalier pourra (d'un point de vue purement théorique) atteindre une longueur infinie dans le vide sans que le barycentre de l'escalier ne dépasse la contrainte qui lui est imposée

Cependant, comme évoqué dans l'introduction, la possibilité de réaliser un tel escalier en physique est fortement incertaine, premièrement, dans un espace légèrement idéalisé, où nos kaplas sont posés à la surface de la terre, sont tous identiques les uns aux autres et ne peuvent s'effondrer sur eux mêmes (il serait alors plus juste de parler de briques composées d'un matériau imaginaire indestructible), le comportement de notre escalier infini est quelque peu flou, ce dernier sera-t-il parallèle à la terre tout du long de sa construction ? S'étendra-t-il à l'infini dans l'espace ? Ces questions resteront ici sans réponse. En réalité, la construction de l'escalier nécessite forcément le passage à un espace mathématique, et ce pour deux raisons majeures, le premier : l'empilement des kaplas par le dessous de l'escalier ne peut se faire que si l'escalier ne repose sur rien (ou si on le

soulève à chaque nouveau kapla ce qui revient au même puisque soulever un escalier de kapla dont la longueur tend vers l'infini reviendrait à faire appel à une quelconque force divine) et finalement le second, le problème de la mesure : si en mathématique chaque avancement rajouté compte, ce n'est pas forcément le cas en physique où il est difficile de considérer un avancement de  $10^{-34}$  mètres comme non négligeable, déjà à partir du 999ème kapla, l'avancement atteint des longueurs de l'ordre du 10ème de millimètre, ce qui, pour des kaplas de 11 centimètres, est plutôt faible.

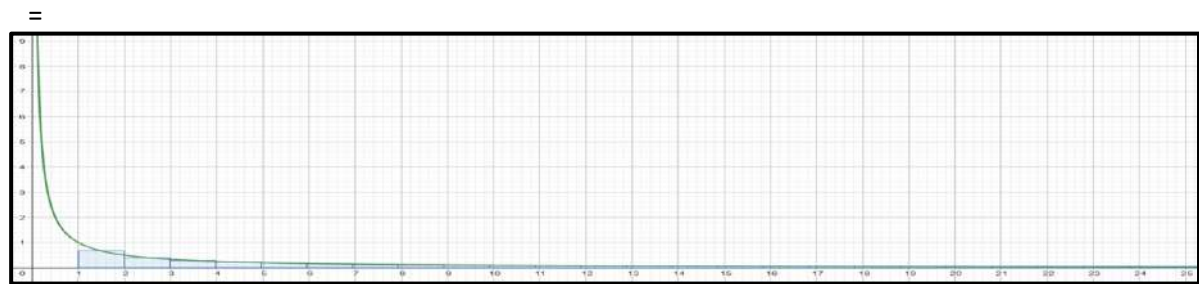
## 5) Preuves annexes :

### 5.1) Démonstration de la divergence de $\sum_{n=1}^k \frac{1}{2n}$ avec $k \in \mathbb{N} \neq 0$ [5]

Les variables définies au préalable ne s'appliquent pas à la démonstration qui suit.

On pose  $\sum_{n=1}^k \frac{1}{2n} = 0.5 \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$

Intéressons-nous d'abord à la fonction inverse :  $\frac{1}{x} \in ]0; +\infty[$ :



Si on a des rectangles de largeur 1 et de longueur  $\frac{1}{k}$  en fonction de l'antécédent  $k$  alors :

- L'ensemble des carrés qui sont en dessous de la courbe correspondent à :

$$(a) \quad \sum_{k=2}^K \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{K}$$

- L'ensemble des carrés qui sont au dessus de la courbe correspondent à :

$$(b) \quad \sum_{k=1}^K \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{K-1}$$

Ainsi l'aire  $A$  en dessous de la courbe est compris entre ces 2 sommes

$$\sum_{k=2}^K \frac{1}{k} \leq A \leq \sum_{k=1}^K \frac{1}{k}$$

Or  $A = \int_1^k \frac{1}{x} dx$  et  $\int_1^k \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^k = \ln k$ .

On sait que  $\ln 1 = 0$  donc  $\sum_{n=2}^k \frac{1}{n} \leq \ln k \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$ .

On s'intéresse à la partie droite soit :

$$(c) \quad \ln k \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k-1}$$

mais il nous manque  $\frac{1}{k}$  pour avoir la somme qui nous intéresse.

Ainsi  $\ln k + \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$  or nous cherchons à savoir son évolution en  $+\infty$  :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln k = +\infty \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0, \text{ donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln k + \frac{1}{k} = +\infty$$

Ainsi en  $+\infty$  la somme des inverses des entiers naturels est supérieure à  $\ln k + \frac{1}{k}$  or  $\ln k + \frac{1}{k}$  diverge en  $+\infty$  donc notre somme diverge aussi en  $+\infty$ .

On avait posé au préalable :

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{2 \cdot k} = 0.5 \cdot \left( \sum_{k=1}^K \frac{1}{k} \right)$$

Nous avons la preuve que la deuxième série (la série harmonique) diverge, or, on sait que le produit d'une série divergente est aussi divergent, donc la somme des inverses des entiers naturels pairs  $\sum_{k=1}^K \frac{1}{2 \cdot k}$  diverge elle aussi.

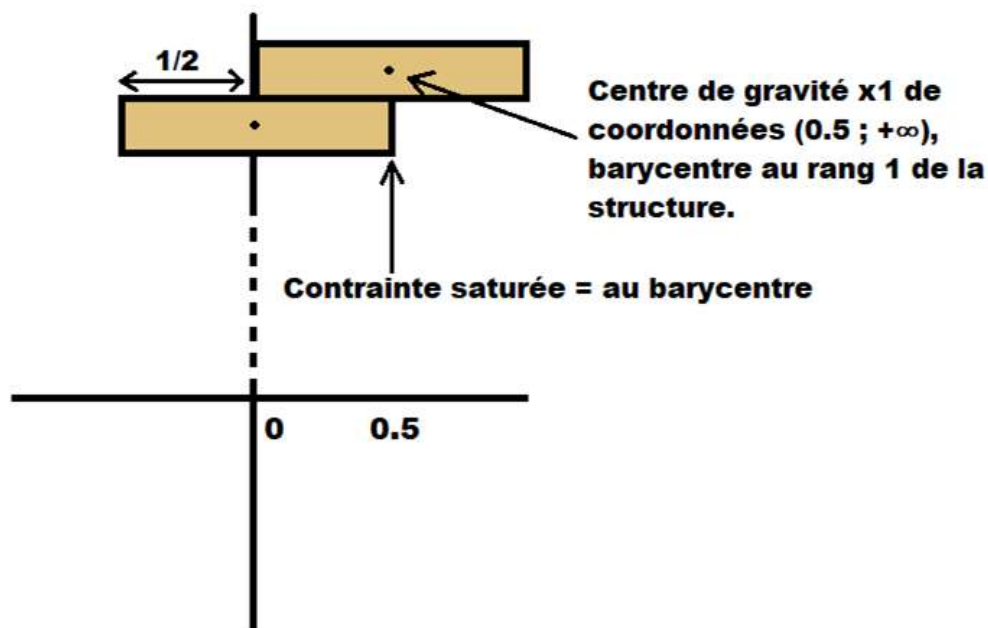
## 5.2) Preuve de l'avancement maximal d'un kapla à un autre

Prenons notre configuration basique du premier rang de l'escalier, nous avons le kapla 1 collé à droite de l'axe des ordonnées et le kapla « fantôme » situé juste en dessous.

Le centre de gravité du kapla 1 est donc à une abscisse de 0.5.

Comme la structure n'est composée que d'un seul centre de gravité influant, (puisque celui du kapla fantôme ne compte pas) il suffit que la contrainte ait la même abscisse que ce centre de gravité pour que cette dernière soit saturée. Au rang 1 de l'escalier  $b_1 = x_1 = 0.5$ , donc il suffit de mettre le bord droit du kapla fantôme à une abscisse de 0.5.

Cela revient à placer le bord du kapla fantôme sous le centre de gravité  $x_1$ , pour ce faire il faut donc que le centre de gravité du kapla fantôme se trouve à une abscisse de 0, et donc que l'écart entre les deux kaplas soit de  $1/2$ .





## 6) Problème supplémentaire

Il me faut poser, pour la question qui suit, un contexte particulier. Lors du congrès à Grenoble, nous tenions un stand pour présenter le sujet de recherche qui avait été le notre tout au long de l'année, et, alors que je présentais nos démonstrations à un professeur (qui se reconnaîtra sans doute), ce dernier me posa la question suivante : « Seriez vous capable, si je vous donnais une distance  $D$  pour un escalier respectant l'avancement défini (dans ce cas là, la somme des inverses des entiers naturels pairs), de me dire le nombre de kaplas composants le dit escalier ? », après un bref instant de réflexion, je me rendis bien compte que, non, je n'en étais pas capable, les lignes qui suivent ont donc pour vocation de répondre à cette question : Avec pour avancement la somme des inverses des entiers naturels pairs, est il possible, à partir d'une distance  $D$  donnée, de calculer le nombre de kaplas composants l'escalier ?

Tout d'abord, prenons la question dans l'autre sens, est il possible de donner la distance  $D$  à partir du nombre de kapla ?

La réponse à cette question est beaucoup plus évidente puisqu'il suffit de calculer la différence entre le centre de gravité du premier kapla (toujours égal à 0.5) et le centre de gravité du kapla à la base de l'escalier (qui pour rappel est égal à  $x_{k+1} = 0.5 - \sum_{n=1}^k (\frac{1}{2n})$ ) on obtient donc la formule suivante :

$$k = \left| 0.5 - \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{2n} \right) \right| - 0.5 \quad [6]$$

où  $k$  est le nombre de kaplas dans l'escalier. On prend la valeur absolue de  $x_{k+1}$  car cette abscisse est parfois négative, et qu'on ne veut pas d'une distance négative pour des raisons évidentes.

Définissons maintenant une distance  $D$  qui nous est donnée, si l'on souhaite trouver  $k$  à partir de  $D$ , il nous faut résoudre l'équation suivante :

$$\left| 0.5 - \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{2n} \right) \right| - 0.5 = D$$

On peut développer cette équation pour essayer de donner un encadrement de  $k$  et ce de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \left| 0.5 - \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{2n} \right) \right| - 0.5 = D \\ \Leftrightarrow & \left| 0.5 - \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{2n} \right) \right| = D + 0.5 \\ \Leftrightarrow & \left| 0.5 - \left( \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2k} \right) \right| = D + 0.5 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{-1}{4} - \dots - \frac{1}{2k} \right| = D + 0.5 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k} = D + 0.5 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) = D + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} = 2D + 1 \end{aligned}$$

On pose  $S_k = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} = 2D + 1$ , puis on utilise la même méthode que dans la preuve annexe sur la divergence de la somme des inverses des entiers naturels pairs :

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \leq \int_1^k \frac{1}{x} dx \leq 1 + \dots + \frac{1}{k-1}$$

$$\Leftrightarrow S_k \leq \ln(k) \leq 1 + S_k - \frac{1}{k} \leq 1 + S_k$$

$$\Leftrightarrow e^{S_k} \leq k \leq e^{S_k+1} = e^{2D+1} \leq k \leq e^{2D+2}$$

On a donc un encadrement plus ou moins précis (qui varie d'un facteur e) qui nous donne bel et bien une approximation du nombre de kaplas dans l'escalier en fonction de la distance  $D$  du dit escalier. Il est à noter qu'une meilleure méthode existe sans doute, il s'agit ici seulement de la première qui me soit venue à l'esprit.

## NOTES DE L'ÉDITION

**[1]** Il est toujours problématique de parler de l'infini, et en particulier, l'expression "coordonnée infinie" n'a pas vraiment de sens. On aurait simplement pu commencer par une coordonnée  $y$  arbitraire et dire que l'échelle s'étend indéfiniment vers le bas.

**[2]** Souvent dans l'article, on rencontre une expression avec l'indice  $k$  qui se répète avec l'indice  $k + 1$ . Comme  $k$  varie dans l'ensemble des nombres naturels positifs, la deuxième expression n'est pas nécessaire.

**[3]** Cette expression est compréhensible, mais elle n'est pas formellement correcte. On aurait pu écrire  $\forall k \in \mathbb{N} (k \neq 0)$ . Ou bien, comme on le trouve dans de nombreux textes, utiliser les symboles  $\mathbb{N}^*$  ou  $\mathbb{N}^+$  pour indiquer l'ensemble des naturels différents de 0. De cette manière, on aurait pu écrire  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

**[4]** Pourquoi ne pas dire immédiatement que  $c_k$  est égal à  $x_{k+1} + 0.5$  ?

**[5]** La démonstration suivante doit être corrigée. J'ai indiqué avec (a), (b), ... certaines formules pour faciliter la référence.

Tout d'abord, il n'est pas approprié d'utiliser la même lettre, en minuscules et en majuscules, pour indiquer des choses différentes. Cela rend la lecture plus difficile et peut entraîner des erreurs. Par exemple, dans les formules (1) et (2), les fractions les plus à droite est  $\frac{1}{K}$  et  $\frac{1}{K-1}$ , et non  $\frac{1}{k}$  et  $\frac{1}{k-1}$ . De plus, comme on peut le voir dans la démonstration, on aurait pu considérer seulement les rectangles au-dessus de la fonction  $\ln$  dans l'intervalle  $[1, K]$ .

La somme (b) n'est pas correcte : l'aire au-dessus de la fonction  $\ln$  dans l'intervalle  $[1, K]$  est  $\sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k}$ . Cette erreur se retrouve également plus loin, mais dans l'inégalité en (c), nous retrouvons l'expression correcte. En ce qui concerne cette inégalité, il n'est pas nécessaire d'ajouter  $\frac{1}{k}$ . Si  $k$  tend vers  $+\infty$ , alors  $k-1$  tend également vers  $+\infty$ .

Enfin, dans la dernière phrase, il semble probablement manquer quelque chose. Il est nécessaire de noter que le produit d'une série divergente par une constante reste une série divergente.

**[6]** La première partie de cette formule (c'est-à-dire,  $k =$ ) est probablement due à une erreur d'inattention. Mais le problème principal est que l'expression  $|(0.5 - \sum_{n=1}^k (\frac{1}{2n}))| - 0.5$  ne représente pas la distance entre  $x_1$  et  $x_{k+1}$ . Cette distance est  $x_1 - x_{k+1}$  (où la valeur absolue n'est pas nécessaire car  $x_1 > x_{k+1}$ ). Ainsi, on obtient  $D = \sum_{n=1}^k (\frac{1}{2n})$ , à partir de laquelle on peut calculer une approximation de  $k$  à l'aide de la procédure présentée dans l'article.