Ovalie

Année 2021 – 2022

<u>Élèves de 4ème</u> : Irène LEMAIRE, Clémentine JAUD, Lilla VERDIER et Coraline DESSANTE—FOULON.
<u>Établissement</u> : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
<u>Enseignante</u> : Florence FERRY.
<u>Chercheur</u> : Olympio HACQUARD.

Le sujet : Au rugby, on peut marquer 3 points (via un drop ou une pénalité), 5 points (via un essai non transformé) ou 7 points (via un essai transformé). Est-ce que 13 – 10 est un score possible ? Est-ce que 4 – 3 est un score possible ? Quels scores peut-on réaliser ? Étant donné un score, combien y a-t-il de façons différentes de le réaliser ?

Nos résultats : Nous avons démontré que tous les scores sont possibles exceptés ceux contenant les nombres 1, 2 ou 4. Trouver le nombre de façons différentes d'obtenir un score reste une question ouverte ; nous avons expliqué pourquoi ce nombre de façons augmente lorsque les nombres croissent et nous avons donné une preuve dans un cas simple. Nous avons ensuite étendu le sujet en prenant un nouveau jeu où l'on peut perdre ou gagner des points et nous avons démontré que tous les scores sont possibles avec une condition sur les deux nombres de départ.

I – Compréhension du sujet

Prenons quelques exemples pour bien comprendre le sujet.

Exemple 1 : on veut atteindre le score 17 – 12.
17 peut-être obtenu avec une pénalité et deux essais transformés : 3 + 7 + 7 = 17.
12 peut-être obtenu avec un essai non transformé et un essai transformé : 5 + 7 = 12.
17 – 12 est donc un score possible. Il y a d'autres façons de l'obtenir ; 17 peut être aussi obtenu en faisant quatre pénalités et un essai non transformé : 3 + 3 + 3 + 3 + 5 = 17.

Exemple 2 : on veut atteindre le score 15 – 13.
15 peut-être obtenu avec trois essais non transformés : 5 + 5 + 5 = 15.
13 peut-être obtenu avec deux essais non transformés et une pénalité : 5 + 5 + 3 = 13.
15 – 13 est donc un score possible. Il y a d'autres façons de l'obtenir ; 15 peut être atteint par exemple avec une pénalité, un essai non transformé et un essai transformé : 3 + 5 + 7 = 15.

Dans la suite de l'article nous mettrons juste les calculs permettant d'obtenir les scores et non plus la correspondance avec le vocabulaire associé au rugby.

II – Tous les scores sont-ils atteignables ?

Le sujet revient à se demander si tous les nombres entiers positifs sont atteignables avec une somme ne contenant que des 3, 5 ou 7. Nous avons donc cherché à atteindre tous les scores jusqu'à 26 à la main et nous avons regroupé nos résultats dans le tableau suivant.

Score A	Nombre de façons de faire le score				
A = 3	3				
A = 5	5				
A = 6	3×2				
A = 7	7				
A = 8	3+5				
A = 9	3×3				
A = 10	3+7	5×2			
A = 11	3×2+5				
A = 12	3×4	5+7			
A = 13	3+5×2	3×2+7			
A = 14	3×3+5	7×2			
A = 15	3×5	3+5+7	5×3		
A = 16	3×2+5×2	3×3+7			
A = 17	3+7×2	3×4+5	5×2+7		
A = 18	3+5×3	3×6	3×2+5+7		
A = 19	3×3+5×2	3×4+7	5+7×2		
A = 20	3+5×2+7	3×2+7×2	5×4		
A = 21	3×7	3×2+5×3	3×3+5+7	7×3	
A = 22	3+5+7×2	3×4+5×2	3×5+7	5×3+7	
A = 23	3+5×4	3×2+5×2+7	3×6+5	7×2+3×3	
A = 24	3×8	3×3+5×3	3×4+5+7	3+7×3	5×2+7×2
A = 25	3×2+5+7×2	3×5+5×2	3+5×3+7	3×6+7	5×5
A = 26	5×4+3×2	3×3+5×2+7	7×2+3×4	7×3+5	3×7+5

Conjecture : exceptés les nombres 1, 2 et 4, il semble que tous les scores soient atteignables.

Démonstration :
On sait, d'après nos résultats ci-dessus, qu'on peut obtenir tous les entiers de 5 à 14. Pour les nombres entiers suivants, il suffit d'ajouter à l'un d'entre eux, un multiple de 10 obtenu avec 7 + 3 ou 5 + 5. Pour choisir l'entier auquel on va ajouter le multiple de 10, on part de celui, entre 5 et 14, qui a la même unité que le nombre que l'on veut atteindre ; c'est possible puisque toutes les unités de 0 à 9 sont présentes.

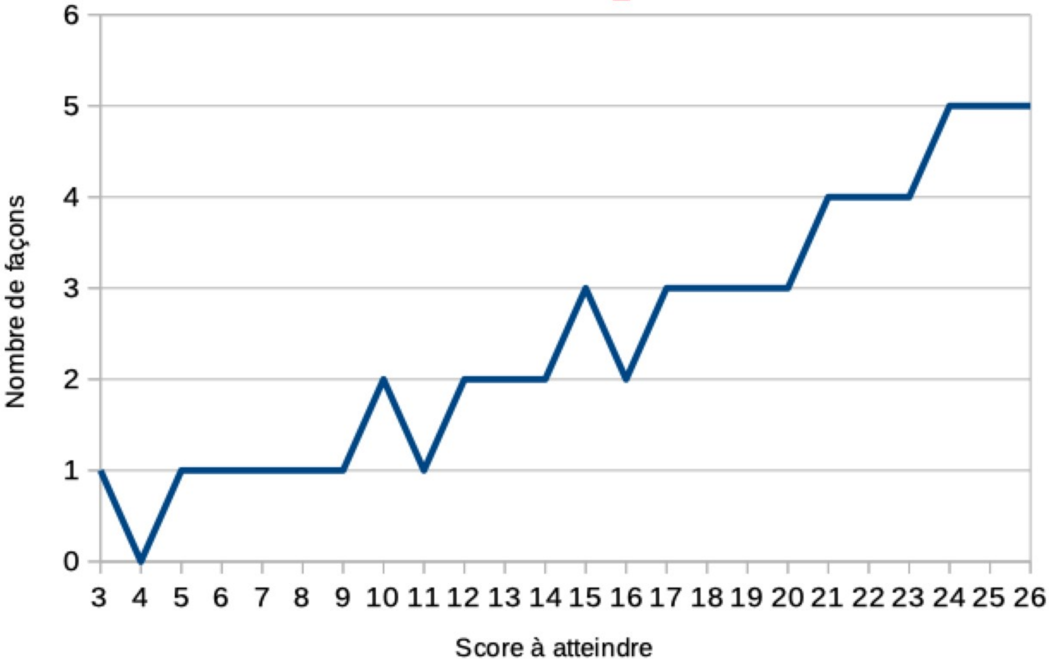
Exemple 1 : on veut obtenir 46
On sait atteindre 6 et on lui ajoute 40 : $3\times2+(3+7)\times4=3\times6+7\times4$.

Exemple 2 : on veut obtenir 71
On ne peut pas atteindre 1 donc on atteint 11 et on lui ajoute 60 : $3\times2+5+(7+3)\times6=3\times8+5+7\times6$

Conclusion : tous les nombres et donc tous les scores peuvent être atteints exceptés ceux contenant 1; 2 ou 4.

III – Combien y a-t-il de façons d'obtenir un score ?

Nous n'avons pas réussi à répondre précisément à cette question, mais nous avons conjecturé que ce nombre augmente et nous avons tenté d'expliquer pourquoi. Pour ce faire, nous avons fait le graphique qui donne le nombre de façons en fonction du score à atteindre.



Ce graphique montre bien une croissance du nombre de cas : le nombre de cas a une tendance à l'augmentation mais on ne peut pas parler d'une croissance stricte car il y a des décrochages au début dus aux nombres 1, 2 et 4 qu'on ne peut avoir. On peut remarquer qu'il y a aussi des « plateaux ».
Tentons d'expliquer cette croissance. Nous avons au moins une façon d'obtenir les nombres de 5 à 14, comme vu précédemment. Lorsqu'on ajoute 10 à ses scores, nous avons deux possibilités : 3 + 7 ou 5 + 5. On ne peut donc jamais redescendre en dessous de une façon.
Tous les scores entre 16 et 26 peuvent être obtenus de deux façons au moins. Lorsqu'ensuite, on ajoute 10, pour les dix nombres suivants, il y a deux possibilités, on ne descend plus en dessous de 2. Lorsque l'on ajouter 20, il y a alors encore plus de façons de le faire : 3 + 3 + 7 + 7 ou 3 + 7 + 5 + 5 ou 5 + 5 + 5 + 5, même si certains résultats vont se retrouver être identiques, la courbe ne pourra plus descendre et augmentera à un certain moment.

Nous avons émis une conjecture selon laquelle, à chaque dizaine supplémentaire, le nombre de façons de rajouter ce nombre de dizaines est de plus en plus grand, on peut penser que le nombre de façons d'obtenir les scores ne va faire qu'augmenter en faisant par moment des paliers.

IV – Extension du sujet – Nouveau jeu

Nous avons fait une extension du sujet, dans laquelle nous avons modifié les règles du rugby : on marque des points à chaque essai et on fait perdre des points à l'équipe adversaire à chaque pénalité. On prend pour représenter cette situation, deux nombres relatifs, un positif et un négatif.
Pourra-t-on encore atteindre tous les nombres ?

Exemple 1 : Gain : +10 et Perte : – 7

Si on veut obtenir 39 ⟶ $39=10\times6+(-7)\times3$
Si on veut obtenir 58 ⟶ $58=10\times10+(-7)\times6$
Si on veut obtenir – 3 ⟶ $-3=10\times6+(-7)\times9$

Avec x = 10 et y = – 7, on a l'impression de pouvoir atteindre n'importe quel nombre.

On s'est en fait aperçu que si on arrive à atteindre 1, on pourra atteindre n'importe quel nombre. Il suffit ensuite de répéter cette opération autant de fois qu'il faut ; si on veut un négatif, on recule assez pour ensuite ajouter des « 1 » et revenir au nombre cherché. Il en est de même si on peut atteindre – 1, tout est alors atteignable.

Par exemple ici on peut atteindre 1 avec nos deux nombres 10 et – 7 : $10\times5-7\times7=1$

- Pour avoir 39 par exemple, il suffit alors de faire : $39\times(10\times6+(-7)\times3)$
On a : $39=39\times6\times10+39\times3\times(-7)=234\times10+117\times(-7)$
Donc 39 peut être atteint avec 234 fois la valeur 10 et 117 fois la valeur – 7.

Remarque : il y a d'autres façons d'obtenir 39, celle que l'on vient de montrer n'est probablement pas la plus simple.

- Pour avoir – 3 : on peut faire – 7 puis ajouter 4 avec le calcul $4\times(10\times5-7\times7)$.
On a : $-3=-7+4\times5\times10+4\times7\times(-7)=20\times10+29\times(-7)$
Donc – 3 peut être atteint avec 20 fois la valeur 10 et 29 fois la valeur – 7.

Exemple 2 : Gain : +9 et Perte : – 3
Après de nombreux essais, on s'est aperçu que les seuls scores possibles sont ceux multiples de 3.

Exemple 3 : Gain : +22 et Perte : – 8
De même ici, les seuls scores possibles que nous avons trouvés sont ceux multiples de 2.

Conjecture : si les deux nombres choisis au départ sont multiples d'un même nombre k alors les scores atteignables seront seulement les nombres multiples de k. On ne pourra donc pas tout atteindre.

Démonstration :
Soit x et y deux nombres entiers relatifs multiples de n, on a : $x = na$ et $y = nb$ avec a et b entiers relatifs.
Soit k_1 et k_2 deux nombres entiers positifs : $k_1\times x-k_2\times y=k_1\times na-k_2\times nb=n(k_1a+k_2b)$
k_1a+k_2b est un entier donc le nombre obtenu est bien un multiple de n.

Dans la suite de l'article, nous prenons donc deux nombres premiers entre eux.

Nous avons effectué de nombreux tests en cherchant toujours à obtenir 1 ou – 1 . Nous avons trouvé une méthode automatique qui s'appuie sur les divisions euclidiennes successives.

Exemple 1 : $x = 17$ et $y = -13$.
On divise la plus grande distance à zéro par la plus petite.

$$\begin{array}{r|l} 17 & 13 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array}$$

Avec 17 et – 13, on peut obtenir 4 car : $17-13\times1=4$

On peut maintenant atteindre 17, – 13 et 4. On garde alors les deux nombres ayant la plus petite distance à 0, – 13 et 4 et on recommence.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array}$$

Avec – 13 et 4, on peut donc avoir – 1 : $-13+3\times4=-1$

Donc on peut atteindre n'importe quel entier comme nous l'avons expliqué plus haut.

Exemple 2 : $x = -41$ et y = +15

$$\begin{array}{r|l} 41 & 15 \\ \cline{2-2} 11 & 2 \end{array}$$

Avec – 41 et 15, on peut obtenir – 11 : $-41+2\times15=-11$

On garde 15 et – 11.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 11 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array}$$

On peut avoir 4 : $15-1\times11=4$

On garde 4 et – 11.

$$\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array}$$

On peut avoir alors – 3 : $2\times4-11=-3$

On garde 4 et – 3.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$$

Avec 4 et – 3 on peut donc obtenir 1 : $4-3=1$
Donc on peut atteindre n'importe quel entier.

Exemple 3 : $x = 3$ et $y = -14$.

$$\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 4 \end{array}$$

On peut maintenant aussi atteindre – 2 : $-14+3\times4=-2$
On garde 3 et – 2.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$$

Avec 3 et – 2, on peut donc avoir 1 : $3+1\times(-2)=1$
Donc on peut atteindre n'importe quel entier.

Il nous semble que cette méthode permet d'obtenir 1 ou – 1 à coup sûr ; en effet, le diviseur diminue de plus en plus jusqu'à nous donner un reste de 1. Ce n'est qu'une conjecture !