Oubli à Macondo

2021 – 2022

Nom, prénom et niveaux des élèves : FEIER Paul et SHEN-NGUYEN Anne-May, Première Générale

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay
Enseignant(s) : COCHARD Hélène, DAMONGEOT Cécile
Chercheur(s) : ERTZBISCHOFF Lucas

1. Présentation du sujet

Dans le lointain village de Macondo, les habitants font face à la peste de l'oubli qui est subitement apparue dans la région. Ils semblent se remémorer tous les nombres qu'ils connaissaient auparavant comme 0, 1, 100, -3, et même √2, mais, ils ont oublié comment calculer. Désormais, ils appellent somme de deux nombres le maximum entre ces deux nombres et produit de deux nombres l'ancienne addition entre ces deux nombres. Par exemple, la somme de 3 et 4 vaut 4 tandis que le produit de 3 par 4 vaut 7. En attendant que la peste de l'oubli disparaisse, les habitants du village doivent s'organiser et vivre avec ces nouvelles habitudes de calcul. Comment fonctionne cette nouvelle façon de calculer? Comment les architectes du village vont-ils effectuer leur travail ?

Pour faciliter la compréhension, nous allons utiliser de nouvelles notations :
- $\oplus$ correspond à l'addition de Macondo donc à notre maximum (max).
- $\otimes$ correspond à la multiplication de Macondo, donc à notre somme (+).

Exemples avec les nouvelles notations :
Somme de Macondo : $3 \oplus 4 = \max(3\,,4) = 4$
Produit de Macondo : $3 \otimes 4 = 3 + 4 = 7$

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

Nous avons d'abord vérifié certaines propriétés des opérations, notamment l'associativité, la commutativité, la distributivité de la somme de Macondo et du produit de Macondo, ainsi que l'existence ou non d'un élément neutre pour ces opérations-là. Nous nous sommes ensuite penchés sur les représentations graphiques de fonctions affines et de polynômes du second degré de Macondo. Puis nous avons tenté de donner une nouvelle définition des équations cartésiennes de droites et des équations du cercle à Macondo, et avons déterminé leurs représentations graphiques respectives.

3. Les propriétés de base des opérations

Nous allons ici étudier la commutativité, l'associativité, la distributivité et l'existence d'un élément neutre pour les opérations de Macondo (somme et produit de Macondo).

3.1 La commutativité

Théorème 1. *La multiplication de Macondo est commutative.*

Preuve :

$\otimes$ correspond à la somme de notre monde. Comme la somme est commutative, $\otimes$ est aussi commutative.

Théorème 2. *La somme de Macondo est commutative.*

Preuve :

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$:

$a \oplus b = \max(a, b) = b$

$b \oplus a = \max(b, a) = b$

alors $a \oplus b = b \oplus a$

Donc $\oplus$ est commutative.

3.2 L'associativité

Théorème 3. *La multiplication de Macondo est associative.*

Preuve :

$\otimes$ correspond à la somme de notre monde. Comme la somme est associative, $\otimes$ est aussi associative.

Théorème 4. *La somme de Macondo est associative.*

Preuve :

Montrons que, quels que soient les réels a, b et c :

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

C'est-à-dire qu'il faut montrer que :

$$\max(a, \max(b, c)) = \max(\max(a, b), c)$$

1) Prouvons d'abord que :
$\max(\max(a, b), c) \leq \max(a, \max(b, c))$

2) Puis prouvons que
$\max(a, \max(b, c)) \leq \max(\max(a, b), c)$

Ces inégalités larges nous garantissent l'égalité.

1) On a d'abord :
$c \leq \max(b, c) \leq \max(a, \max(b, c))$
Donc : $c \leq \max(a, \max(b, c))$

Comme :
b $\leq$ max (b, c) $\leq$ max (a , max (b , c))
a $\leq$ max (a , max (b , c))
Donc max (a , b) $\leq$ max (a , max (b , c))

Alors : max (max (a , b) , c) $\leq$ max (a , max (b , c)).

2) De même, en remplaçant a par c, on trouve que :
max (max (a , b) , c) $\leq$ max (a , max (b , c)).

Finalement :
Comme max (a , max (b , c)) $\leq$ max (max (a , b) , c)
et max (max (a , b) , c) $\leq$ max (a , max (b , c)),
alors max(a , max (b , c)) = max (max (a , b) , c).

Donc (a $\oplus$ b) $\oplus$ c = a $\oplus$ (b $\oplus$ c).
Donc $\oplus$ est associative.

3.3 La distributivité

3.3.1 De $\otimes$ sur $\oplus$

Théorème 5. *Le produit de Macondo se distribue sur la somme de Macondo.*

Preuve :
Soient a, b, c trois réels tels que a $\leq$ b $\leq$ c :
a $\otimes$ (b $\oplus$ c) = a + max (b , c) = a + c
(a $\otimes$ b) $\oplus$ (a $\otimes$ c) = max (a + b , a + c) = a + c

Donc : a $\otimes$ (b $\oplus$ c) = (a $\otimes$ b) $\oplus$ (a $\otimes$ c)

De même pour la distributivité par b et c, en échangeant les rôles.

Donc la multiplication de Macondo ($\otimes$) se distribue sur l'addition de Macondo ($\oplus$).

3.3.2 De $\oplus$ sur $\otimes$

L'addition de notre monde ne se distribue pas sur la multiplication de notre monde. Mais nous avons voulu essayer la distributivité pour l'addition sur la multiplication de Macondo.

Nous avons trouvé un contre-exemple :
Avec a = 1, b = 3 et c = 6 :

3 $\oplus$ (1 $\otimes$ 6) = max (3 ; 1 + 6) = 7
(3 $\oplus$ 1) $\otimes$ (3 $\oplus$ 6) = max (3 ; 1) + max (3 ; 6) = 3 + 6 = 9
Donc 3 $\oplus$ (1 $\otimes$ 6) $\neq$ (3 $\oplus$ 1) $\otimes$ (3 $\oplus$ 6)

Donc l'addition de Macondo ($\oplus$) ne se distribue pas en général sur la multiplication de Macondo ($\otimes$).

3.4 L'élément neutre

3.4.1 Pour ⊗

Théorème 6. *L'élément neutre de la multiplication de Macondo ⊗) est 0 et le symétrique de x est -x.*

Preuve :

⊗ correspond à la somme de notre monde. Comme l'élément neutre de la somme est 0, ⊗ a aussi pour élément neutre 0. De même pour le symétrique.

3.4.2 Pour ⊕

Théorème 7. *L'addition de Macondo n'admet pas d'élément neutre.*

Preuve :

On suppose que l'élément neutre de l'addition de Macondo (⊕) qu'on appelle E existe.
Pour tout a réel :

$$\max(a, E) = a$$

Donc E devrait être égal à $-\infty$ ce qui est impossible.

Donc ⊕ n'a pas d'élément neutre et donc pas de symétrique.

(On pourrait, en vérité, utiliser $-\infty$, en ajoutant cet élément à l'ensemble des objets que l'on étudie, mais nous avons estimé que cela aurait compliqué les raisonnements et calculs. Nous avons voulu nous concentrer sur la suite.)

4. Analyse et Géométrie

4.1 Les fonctions affines

Dans notre monde, on définit une fonction affine f telle que :

$$f(x) = ax + b \text{ avec a et b deux réels}$$

Dans le monde de Macondo, en remplaçant les multiplications/additions de notre monde par celles de Macondo, on obtient :

$f(x) = a \otimes x \oplus b$

Soit f(x) = max (a + x , b) (avec a et b réels)

Déterminons sa représentation graphique.

Tout d'abord, deux cas s'offrent à nous :

1) f(x) = max (a + x , b) = a + x
2) f(x) = max (a + x , b) = b

1) $f(x) = \max(a + x , b) = a + x$
Donc : $a + x \geq b$
Ainsi : $x \geq b - a$

Donc pour $x \geq b - a$, $f(x) = a + x$.
La représentation graphique est une droite de pente 1 et d'ordonnée à l'origine a.

2) $f(x) = \max(a + x , b) = b$
Donc : $a + x \leq b$
Ainsi : $x \leq b - a$

Donc pour $x \leq b - a$, $f(x) = b$.
La représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses, d'ordonnée à l'origine b.

Le point où la représentation graphique **"change"** d'équation a pour coordonnées $(b - a ; b)$.
Ainsi par exemple, on peut donner la représentation graphique de la fonction f donnée par
$f(x)= 2 \boxtimes x \boxplus 3$

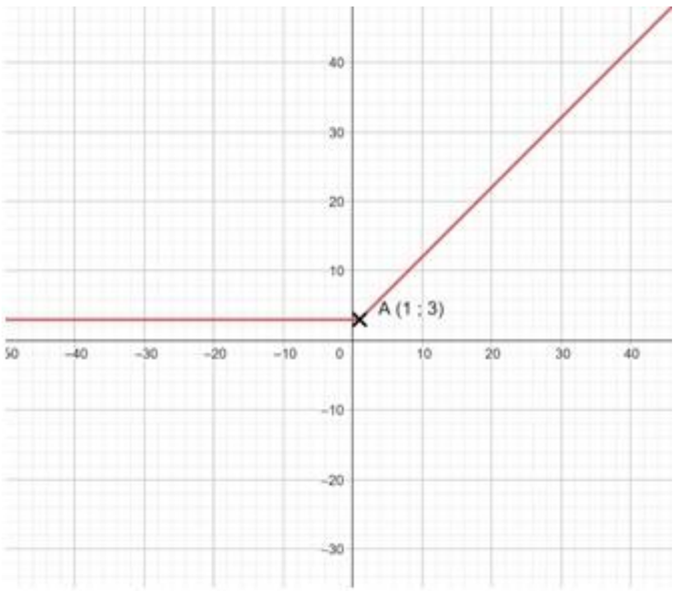

Figure 1 : représentation graphique de la fonction $f(x)= 2 \boxtimes x \boxplus 3$

4.2 Les polynômes du second degré

Dans notre monde, on définit un polynôme du second degré P tel que:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec a un réel non nul, b et c deux réels}$$

Dans le monde de Macondo, en remplaçant les multiplications/additions de notre monde par celles de Macondo, on obtient :

$P(x) = a \otimes x \otimes x \oplus b \otimes x \oplus c$

Soit $P(x) = \max(2x + a, b + x, c)$ (avec a et b réels)

Déterminons sa représentation graphique.

Trois cas s'offrent à nous :

1) max (2x + a, b + x, c) = 2x + a
2) max (2x + a, b + x, c) = b + x
3) max (2x + a, b + x, c) = c

1) max (2x + a , b + x , c) = 2x + a

max (2x + a , b + x , c) = 2x + a ⇔ 2x + a > b + x et 2x + a > c
⇔ x > b − a et x > $\frac{c-a}{2}$

Donc la représentation graphique du polynôme du second degré pour x > b−a et x > $\frac{c-a}{2}$ est une droite d'équation y = 2x + a. Elle a pour pente 2 et pour ordonnée à l'origine a.

2) max (2x + a , b + x , c) = b + x

max (2x + a, b+x, c) = b+x ⇔ b + x > 2x + a et b + x > c
⇔ x < b − a et x > c −b

Donc la représentation graphique du polynôme du second degré pour x < b − a et x > c − b est une droite d'équation y = b + x. Elle a pour pente 1 et pour ordonnée à l'origine b.

On note que, pour que ce cas puisse se réaliser, il faut que x < b − a **et** x > c − b. Il faut donc que c −b < b − a soit que c −2b + a < 0.

3) max (2x + a, b + x, c) = c

Max (2x + a, b+x, c) = c ⇔ c > 2x + a et c > b + x
⇔ x < $\frac{c-a}{2}$ et x < c − b

Donc la représentation graphique du polynôme du second degré pour x < $\frac{c-a}{2}$ et x < c−b est une droite d'équation y = c. Elle est parallèle à l'axe des abscisses et a pour ordonnée à l'origine c.

Pour en venir à la représentation graphique finale, il faut prendre impérativement en compte le fait que c −b < b − a.

En effet, si c −b < b – a, alors c - 2b + a < 0.
Donc :

Si c - 2b + a < 0 alors il y a 3 séquences de droite comme le 2^{e} cas a bien lieu.

Si c - 2b + a ≥ 0 alors il y a 2 séquences de droite comme le 2^{e} cas n'a pas lieu.

Conclusion :

$$f(x) = \begin{cases} c \text{ si } x < c - b \\ b + x \text{ si } c - b < x < b - a \\ 2x + a \text{ si } x > b - a \end{cases}$$

Voici deux illustrations mettant en évidence ces cas de figure :

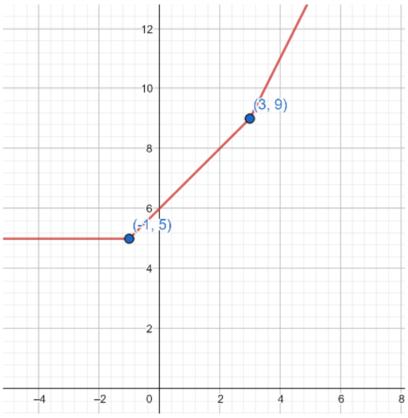

Figure 2 : polynôme du second degré
a=3 ; b=6 ; c=5 donc c-b<b-a

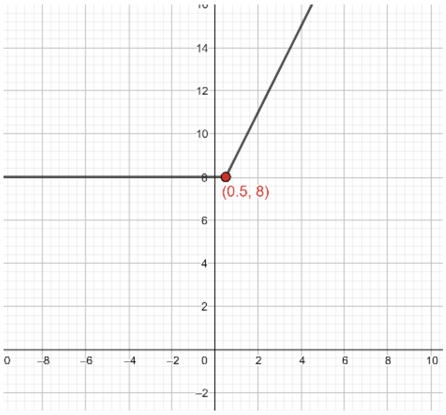

Figure 3 : polynôme du second degré
a=7 ; b=3 ; c=8 donc c-b>b-a

4.3 Les équations cartésiennes de droites

Définition d'une droite dans notre monde :

D = { (x ; y) / ax + by + c = 0 } avec a, b et c donnés

Définition d'un ensemble E avec a , b , c donnés :

E = { (x ; y) ∈ ℝ × ℝ/ max (a + x ; b + y ; c) **atteint 1 / 2 / 3 fois**.}

On ne peut pas utiliser d'équation cartésienne comme celle de notre monde puisque 0 est l'élément neutre de notre addition. Or, l'addition de Macondo, comme nous l'avons vu, n'admet pas d'élément neutre.

On a donc tenté de donner une nouvelle définition de droite dans le monde de Macondo. Pour l'instant, on se laisse le choix entre un maximum atteint une fois (un des éléments du max est strictement supérieur aux deux autres), deux fois (deux des éléments du max sont égaux et sont strictement supérieurs au dernier élément), ou trois fois (les trois éléments sont égaux).

On a donc 3 cas, et 3 sous cas pour les deux premiers cas :

1) max (a + x ; b + y ; c) atteint une fois :

a) max (a + x ; b + y ; c) = a + x

Donc : a + x > b + y et a + x > c
D'où : y < a - b + x et x > c – a

On obtient donc une partie de plan « sous » la droite d'équation y = a – b + x et « à droite » de la droite d'équation x = c – a, avec ces droites exclues.

b) max (a + x ; b + y ; c) = b + y

Donc : b + y > a + x et b + y > c
D'où : y > c – b et x > b – a + y

On obtient donc une partie de plan « au-dessus » de la droite d'équation y = c – b et « à droite » de la droite d'équation x = b – a + y, avec ces droites exclues.

c) max (a + x ; b + y ; c) = c

Donc : c > a + x   et c > b + y
D'où : y < c - b et x < c – a

On obtient donc une partie de plan « en-dessous » de la droite d'équation y = c – b et « à gauche » de la droite d'équation x = c – a, avec ces droites exclues.

Quand le max est atteint une fois, en rassemblant les morceaux obtenus par les différents cas, on obtient presque la totalité du plan, les droites d'équations y = a – b + x, x = c – a et y = c – b exclues.

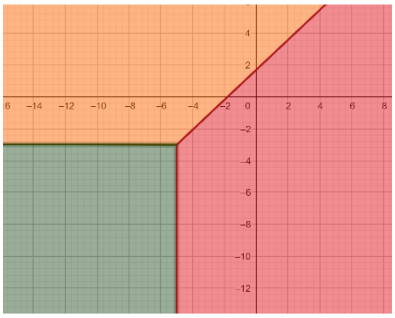

Figure 4 : exemple de maximum atteint une fois max (**4 + x** ; **2 + y** ; **-1**)

2) max (a + x ; b + y ; c) <u>atteint deux fois</u> :

a) max (a + x ; b + y ; c) = a + x = b + y

Donc : a + x = b + y > c
D'où : y = a – b + x avec x > c – a et y > c – b

On obtient alors une demi-droite qui a pour équation y = a – b + x avec x > c – a et y > c – b. Elle est de pente 1 et « commence » au point de coordonnées (c – a ; c – b) exclu.

b) max (a + x ; b + y ; c) = b + y = c

Donc : b + y = c > a + x
D'où : y = c – b avec x < c – a

On obtient alors une demi-droite qui a pour équation y = c – b avec x < c – a. Elle est parallèle à l'axe des abscisses et « commence » aussi au point de coordonnées (c – a ; c – b) exclu.

c) max (a + x ; b + y ; c) = a + x = c

Donc : a + x = c > b + y
D'où : x = c – a avec y < c – b

On obtient alors une demi-droite qui a pour équation x = c – a avec y < c – b. Elle est parallèle à l'axe des ordonnées et « commence » aussi au point de coordonnées (c – a ; c – b) exclu.

Quand le max est atteint deux fois, en rassemblant les morceaux obtenus par les différents cas, on obtient des demi-droites qui se rejoignent au point de coordonnées (c – a ; c – b) exclu. Elles complètent une partie des points qui ne sont pas compris dans l'ensemble quand le max est atteint une fois, comme un puzzle.

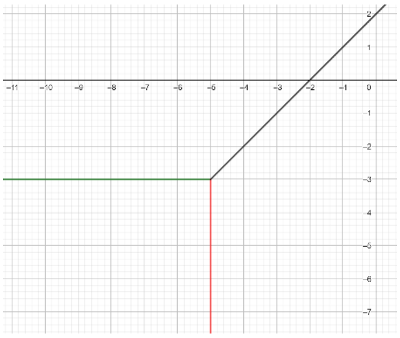

Figure 5 : exemple de maximum atteint deux fois

3) max (a + x ; b + y ; c) <u>atteint trois fois</u> :

Donc : a + x = b + y = c
D'où : x = c - a et y = c – b

⇨ Quand le max est atteint trois fois, l'ensemble se résume donc au point de coordonnées (c - a ; c - b). Il complète le « puzzle »,tout le plan est représenté en prenant en compte tous les trois cas, en étant le point compris ni dans l'ensemble quand le max est atteint une fois, ni dans l'ensemble quand le max est atteint deux fois.

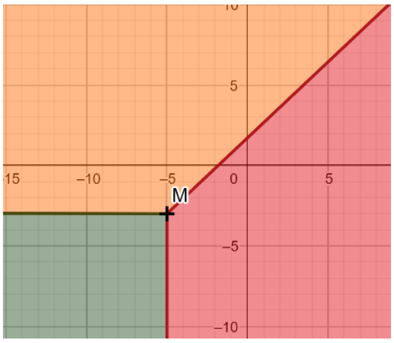

Figure 6 : exemple de maximum atteint trois

Conclusion :
Nous avons choisi comme définition de la droite dans le monde de Macondo :
D = { (x ; y) $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$/ max (a + x ; b + y ; c) **atteint 2 fois**.}
C'est celle dont la représentation ressemble le plus aux droites de notre monde, et c'est la seule de dimension 1. Dans le cas où la max est atteint 1 fois, on obtient des objets de dimension 2, dans celui où le max est atteint 3 fois, on obtient un point uniquement.

4.4 Le cercle

Définition d'un cercle dans notre monde :
C = { (x, y) réels / $x^2 + y^2 - (r^2) = 0$ } avec r le rayon du cercle fixé.

Définition d'un cercle à Macondo :
C = { (x, y) réels / max(2x ; 2y ; -2r} atteint 2 fois} (on suppose qu'il se passera la même chose qu'avec les équations de droites)

1) si max (2x ; 2y ; -2r) = 2x = 2y
alors y = x et y > -r et x > -r
On obtient donc une demi-droite d'équation y = x avec y > -r et x > -r. Elle a pour pente 1 et « commence » au point de coordonnées (-r ; -r) exclu et continue dans la partie « à droite et en haut » du plan.

2) si max (2x ; 2y ; -2r) = 2x = -2r
alors x = -r et y < -r
On obtient donc une demi-droite d'équation x = -r avec y < -r. Elle est parallèle à l'axe des ordonnées et est « en-dessous » de la droite d'équation y =-r avec le point de coordonnées (-r ; -r) exclu.

3) si max (2x ; 2y ; -2r) = 2y = 2r
alors y = -r et x < -r
On obtient donc une demi-droite d'équation y = -r avec x < -r. Elle est parallèle à l'axe des abscisses et est « à gauche » de la droite d'équation x = -r avec le point de coordonnées (-r ; -r) exclu.

On peut conjecturer qu'une courbe dans le monde de Macondo, en réutilisant nos définitions de certaines courbes (cercle, courbes représentatives de polynômes de second degré) est toujours une réunion finie de droites et de segments. (En effet, avec des exposants dans notre monde qui permettent d'obtenir des courbes, on arrive seulement à des coefficients multiplicateurs dans le monde de Macondo.)

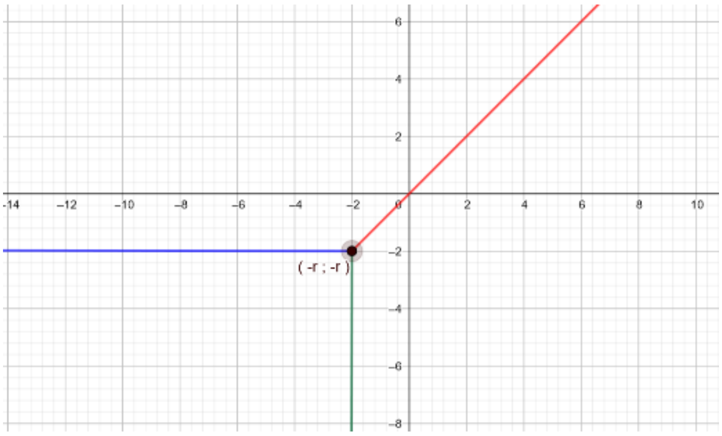

Figure 7 : max (2x ; 2y ; -2r)

5 Conclusion

Il est important de noter qu'on a supposé que le produit de Macondo est prioritaire par rapport à la somme de Macondo, comme il en est dans notre monde. On a également utilisé, lors de nos descriptions de représentations graphiques des termes (comme « au-dessus » etc.) valables seulement avec un repère orthonormal avec avec l'axe des abscisses de gauche à droite et l'axe des ordonnées de bas en haut. Nos graphiques sont en annexe.

C'est un travail très intéressant qu'on a pu mener, et qu'on a beaucoup apprécié. Néanmoins, il reste à compléter par d'autres idées et pistes de recherches ! On pourrait par exemple essayer de retrouver avec les opérations de Macondo des équations qui donneraient des courbes. On a également pensé à créer une courbe en augmentant à l'infini le degré d'un polynôme, qui donnerait une infinité de petits segments, se rapprochant de la courbe de la fonction exponentielle…

On voudrait aussi remercier nos professeures de mathématiques et le chercheur qui nous a proposé ce projet, et qui nous ont donné une autre image des mathématiques.

Si cela vous intéresse, « Macondo » est un village imaginaire qui vient en fait du livre
« *Cent ans de solitude* » de Gabriel García Márquez.