Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Avec ordre et magie !

Année 2022- 2023

Baptiste Claudel, Joséphine Gradeck, Judy Alnnasovri, Luke Guiot, Victor Scopel, Zackary Humblot, élèves de 3ème.
Alharth Alahmad, Alice Nass, Lila Drouaillet, Nmark Alahmad, Rosa Creusot, Violette Bergot, élèves de 4ème.
Alexane Brogard-Valentin, Andy Osche-Bastien, Arman Asatryan, Charlie Dubas, Garance Chenot, Louise Champagnat, Lucie Houin-Mallet, élèves de 5ème.

Encadrés par Louisette Hiriart, Ziya Findik
Établissement : Collège George Chepfer de Villers lès Nancy
Chercheuse : Marie Duflot-Kremer, LORIA Nancy.

1. Présentation du sujet

Deviner une carte piochée au hasard dans un jeu rien qu'en connaissant sa couleur et celle de quelques cartes suivantes, cela vous semble impossible ? Découvrez comment avec un peu d'ordre et pas mal de science, on peut percer le secret de cette apparente magie, et pourquoi pas voir jusqu'où pousser le tour.

2. Sommaire

1°) Dans un premier temps, au détour d'un tour de magie avec jeu de 32 cartes, les élèves montreront que c'est possible, ils vont décortiquer ce tour de magie grâce à un codage binaire des 32 cartes et une règle de rangement des cartes.
2°) Puis les élèves vont expliquer comment avec un peu d'ordre et beaucoup de science, ils rangeront le jeu de cartes.

a) Pour simplifier, tout d'abord avec un jeu de 8 cartes seulement.
b) Puis avec un jeu de 16 cartes.
c) Et enfin avec un jeu de 32 cartes.
d) Pour terminer, ils pousseront même le tour de magie avec un jeu de 64 cartes.

3. Conclusion

Le codage binaire des cartes, des arbres de possibilités de rangement des cartes, un algorithme de rangement de ces cartes, des graphes nous ont permis de résoudre le problème et de découvrir des extensions possibles.

1° Le tour de magie effectué par notre chercheuse pour présenter le sujet.

Notre chercheuse Marie, la magicienne possède un jeu de 32 cartes, tout à fait normal et le montre au public. Puis elle demande à 5 personnes du public de s’avancer et de se placer face à elle en ligne. Elle tient le jeu de façon à ne voir que le dos des cartes et demande à une personne de couper le jeu autant de fois qu’elle le souhaite. Le but du tour de magie sera de déterminer la nature de la dernière carte de coupe bien sûr sans la retourner.
Elle distribue alors à chacune des 5 personnes placées en ligne une carte en les prenant dans l’ordre. La 1ère personne servie possède la carte de coupe. La magicienne ne voit toujours que le dos des cartes.
Elle demande simplement à chacune des 5 personnes de lever le bras que si elle possède une carte noire. La magicienne donne alors la nature de la carte de coupe. Fabuleux !!!
À nous de découvrir son secret !

2° Qu’est-ce que couper un jeu de cartes ?

Un rangement du jeu de carte peut être considéré comme **un cycle**, on pourrait rabattre les cartes et les placer en cercle.
Couper le jeu, c’est prendre un paquet de cartes du dessus pour le placer en dessous de la pile.
La carte de coupe est ainsi au-dessus, elle a été choisie au hasard dans le cycle du jeu par la coupe. **Couper un jeu, c’est donc choisir une carte au hasard**, c’est-à-dire la carte de coupe.
Couper un jeu de carte, ce n’est pas le mélanger, si on replace le jeu en cercle, il est identique à celui du départ.

3° Système binaire.

Pour chaque carte, on ne déclare que sa couleur **« Rouge »** ou **« Noire ».** On se ramène à un système de numération binaire en remplaçant

- la couleur **« Rouge »** par **0**
- la couleur **« Noire »** par **1**

Ainsi la suite ordonnée de 5 couleurs **R N R N R** dans le jeu sera représentée par le quintuplet (**0 1 0 1 0**).

4° Pourquoi avoir distribué une carte à 5 personnes placées en ligne ?

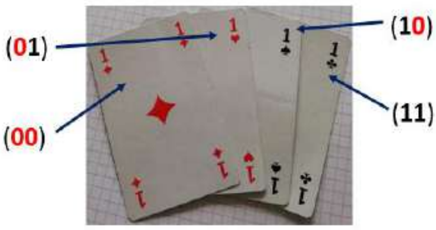
C’est-à-dire pourquoi la couleur de 5 cartes consécutives d’un jeu de 32 cartes permet de déterminer la nature exacte de la première d’entre elles ?

a) On a d’abord constaté qu’il y a **exactement 4 couples** différents composés de **0** et de **1** :

(**0 0**) , (**0 1**) , (**1 0**) , (**1 1**) .

Ainsi, dans un jeu de 4 cartes, on peut nommer chaque carte par un couple différent.
Un couple permettra alors de déterminer une carte parmi 4.

Par exemple dans ce jeu de 4 cartes composé des 4 As, on a associé à chaque couple une carte et une seule.



b) Puis, il y a **exactement 8 triplets** différents composés de **0** et de **1** :

(**0 0 0**) , (**0 0 1**) , (**0 1 0**) , (**0 1 1**) , (**1 0 0**) , (**1 0 1**) , (**1 1 0**) , (**1 1 1**).

C'est le double du nombre de couples précédents car comme on le voit, à chaque couple on peut ajouter soit **0**, soit **1** pour former un triplet.
Ainsi dans un jeu de 8 cartes, on peut nommer chaque carte par un triplet différent.
Un triplet permettra alors de déterminer une unique carte parmi 8.

c) Et il y a **exactement 16 quadruplets** différents composés de **0** et de **1.** C'est le double du nombre de triplets précédents car à chaque triplet, on peut ajouter soit **0**, soit **1** pour former un quadruplet.
Ainsi dans un jeu de 16 cartes, on pourra nommer chaque carte par un quadruplet différent.
Un quadruplet permettra alors de déterminer une unique carte parmi 16.

d) Et finalement, il y a **exactement 32 quintuplets** différents composés de **0** et de **1.**
C'est le double du nombre de quadruplets précédents car à chaque quadruplet on peut ajouter soit **0**, soit **1** pour former un quintuplet.
Ainsi dans un jeu de 32 cartes, on peut nommer chaque carte par un quintuplet différent.
Un quintuplet permettra de déterminer une carte parmi 32.

Grace à un codage des 32 cartes, nous allons pouvoir attribuer un unique quintuplet composé de **0** et de **1** à chacune des 32 cartes .

5° Codage des 32 cartes par des quintuplets différents composés de 0 et de 1.

Il y a beaucoup de manières différentes de coder les 32 cartes avec des quintuplets composés de **0** et de **1**, on en a choisi une assez simple à retenir par cœur.

● Les deux premiers bits d'un quintuplet détermineront **une enseigne** parmi les 4 :

0 0 ♦ **0 1** ♥	**1 0** ♠ **1 1** ♣
*Une carte **rouge** commence par **0**.*	*Une carte **noire** commence par **1**.*

● Les trois derniers bits d'un quintuplet détermineront **une valeur** parmi les 8 :

0 0 0 ⟶ As	**0 1 1** ⟶ 9	**1 1 0** ⟶ Dame
0 0 1 ⟶ 7	**1 0 0** ⟶ 10	**1 1 1** ⟶ Roi
0 1 0 ⟶ 8	**1 0 1** ⟶ Valet	

Exemples :

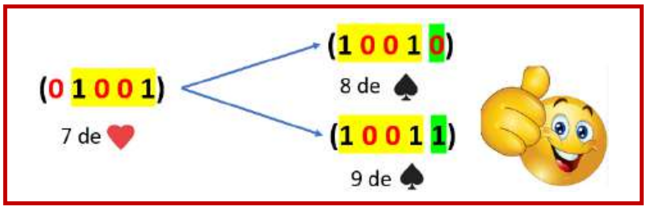
$(\underbrace{0\,0}_{\text{Enseigne}}\,\underbrace{0\,1\,1}_{\text{Valeur}}) \leftrightarrow$ 9 de ♦ $(\underbrace{1\,0}_{\text{Enseigne}}\,\underbrace{1\,0\,0}_{\text{Valeur}}) \leftrightarrow$ 10 de ♠

6° Règle de rangement des cartes.

Dans ce jeu de 32 cartes, pour la carte de coupe, on connaît sa couleur et celle des 4 cartes suivantes.
Cela nous donne un quintuplet composé de **0** et de **1** qui détermine de manière unique la carte de coupe.
Par exemple, après une coupe du jeu, si les 5 premières couleurs sont **R N R R N**, elles correspondent au quintuplet (**01001**). Ce quintuplet détermine de manière unique la carte de coupe, soit le 7 de cœur.
Si on coupe le jeu juste à la carte suivante, les 5 premières couleurs sont alors **N R R N R** ou **N R R N N**.

Les 5 couleurs **N R R N R** correspondent au quintuplet (**10010**) qui détermine de manière unique la carte suivante dans le jeu, le 8 de pique.
Les 5 couleurs **N R R N N** correspondent au quintuplet (**10011**) qui détermine de manière unique la carte suivante dans le jeu, le 9 de pique.

Dans le jeu de 32 cartes, le quintuplet (**01001**) qui représente le 7 de cœur ne pourra être suivi que par le quintuplet (**10010**) qui représente le 8 de pique ou par le quintuplet (**10011**) qui représente le



9 de pique.

On peut alors énoncer la règle de rangement des cartes :

On ne peut mettre une carte derrière l'autre que si les 4 derniers bits du quintuplet de la 1ère carte sont les 4 premiers bits du quintuplet de la carte suivante.

On a alors trouvé une suite possible de 32 couleurs rouges **0** ou noires **1**, 16 rouges et 16 noires, sans jamais avoir un même quintuplet composé de **0** et de **1** dans chaque fenêtre de largeur 5 qui se déplace sur la suite.

1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0

On l'a trouvée par des essais successifs avec parfois un retour en arrière sur plusieurs couleurs de la suite, en commençant par le quintuplet (**11111**).

On peut alors citer un rangement des 32 quintuplets qui respecte la règle de rangement, à savoir : (**11111**) - (**11110**) - (**11100**) etc. en déplaçant pas-à-pas une fenêtre de largeur 5 sur la suite.
La suite se referme circulairement sur elle-même, donc les derniers quintuplets seront alors (**01100**) - (**11001**) - (**10011**) - (**00111**) – (**01111**) et on retombe sur le 1er quintuplet (**11111**).

Le rangement des 32 quintuplets différents composés de **0** et de **1** nous donne un rangement des 32 cartes à l'aide du codage défini.

(**11111**) le roi de trèfle
(**11110**) la dame de trèfle
(**11100**) le 10 de trèfle
(**11000**) l'as de trèfle
(**10000**) l'as de pique
(**00000**) l'as de carreau
(**00001**) le 7 de carreau
(**00011**) le 9 de carreau
(**00110**) la dame de carreau
(**01101**) le valet de cœur
(**11011**) le 9 de trèfle
(**10111**) le roi de pique
(**01110**) la dame de pique
(**11101**) le valet de pique
(**11010**) le 8 de trèfle
(**10100**) le 10 pique

(**01001**) le 7 de cœur
(**10010**) le 8 de pique
(**00100**) le 10 de carreau
(**01000**) l'as de cœur
(**10001**) le 7 de pique
(**00010**) le 8 de carreau
(**00101**) le valet de cœur
(**01010**) le 8 de cœur
(**10101**) le valet de pique
(**01011**) le 9 de cœur
(**10110**) la dame de pique
(**01100**) le 10 de cœur
(**11001**) le 7 de trèfle
(**10011**) le 9 de pique
(**00111**) le roi de carreau
(**01111**) le roi de cœur

Et on retombe sur la 1ère carte (**11111**) le roi de trèfle puisque le jeu de carte est un cycle.

Le jeu de carte est rangé et prêt pour le tour de magie.

On a alors étudié comment ranger les cartes avec un peu d'ordre et pas mal de science …. Et non pas par des essais et erreurs.

7° Comment ranger un jeu de cartes avec un peu d'ordre et pas mal de sciences ?

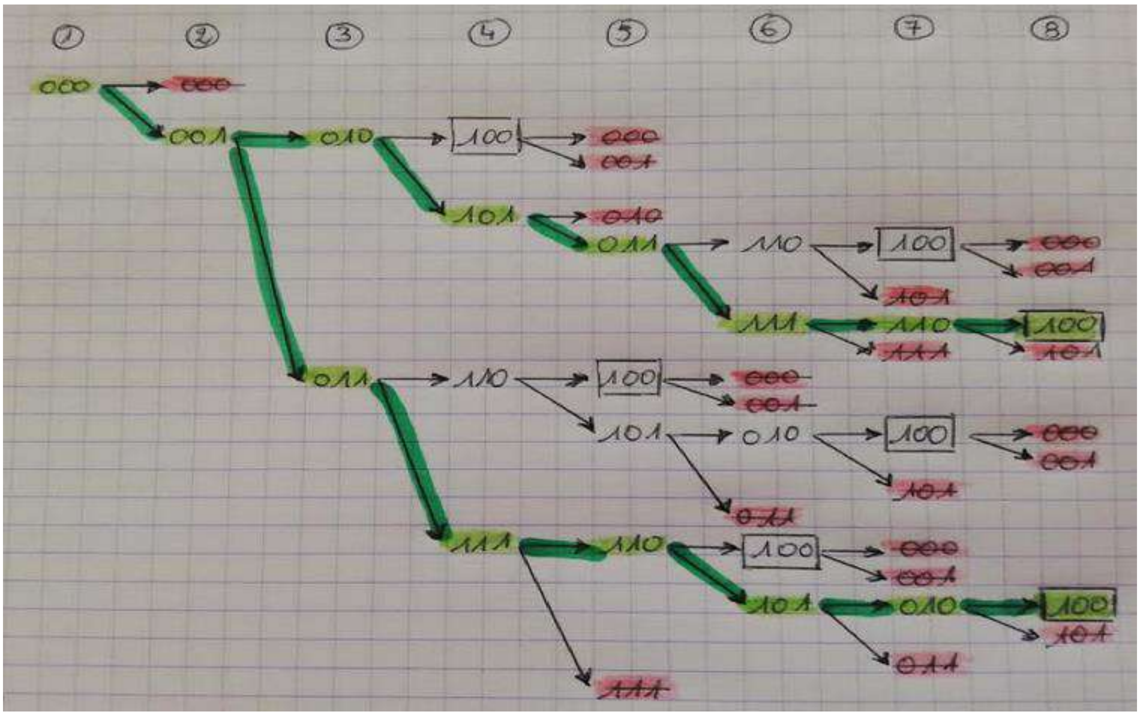
a) Pour simplifier et mieux voir les choses, on a pris **un jeu de 8 cartes**, les 7 et 8 dans les 4 enseignes.

● Les 8 cartes sont codées par les 8 triplets différents composés de 0 et 1 de la manière suivante :
Les 2 premiers bits pour l'enseigne comme on l'a déjà défini,
Le dernier bit pour la valeur de la carte, **0** pour le 7 et **1** pour le 8.

Ainsi par exemple : (**010**) représente le 7 de cœur et (**111**) le 8 de trèfle.

● La règle de rangement des cartes est la suivante :
2 cartes ne se suivent dans le jeu que si les 2 derniers bits du triplet représentant la première des deux cartes sont les 2 premiers bits du triplet représentant la carte suivante.

● On a alors établi **un arbre** de toutes les possibilités en commençant par le triplet (**0 0 0**).



- On part du triplet (**000**), on garde les 2 derniers bits **00** et on rajoute soit **0**, mais le triplet (**000**) ne convient pas car on l'a déjà . On rajoute donc **1** et on obtient le triplet (**001**).

- Du triplet (**001**) on garde les 2 derniers bits **01** et on ajoute :
  - soit **0**, on obtient le triplet (**010**),
  - soit **1** et on obtient le triplet (**011**).

- Du triplet (**010**), on garde **10** et on ajoute :
  - soit **0** et on obtient soit le triplet (**100**),
  - soit **1** et on obtient le triplet (**101**).

- Du triplet (**100**), on garde **00** et on ajoute :
  - soit **0** et on retombe sur le triplet (**000**),
  - soit **1** et on retombe dur le triplet (**001**).

Dans ces 2 derniers cas, on retombe sur un triplet que l'on a déjà dans l'arbre. On ne peut poursuivre, on trouve une boucle de 4 triplets, donc le rangement de 4 cartes.

- Du triplet (**101**), on garde **01** et on ajoute :
  - soit **0** et on obtient le triplet (**010**) qui ne convient pas car on l'a déjà dans l'arbre,
  - soit **1** et on obtient le triplet (**011**)

Et on continue ainsi de suite.

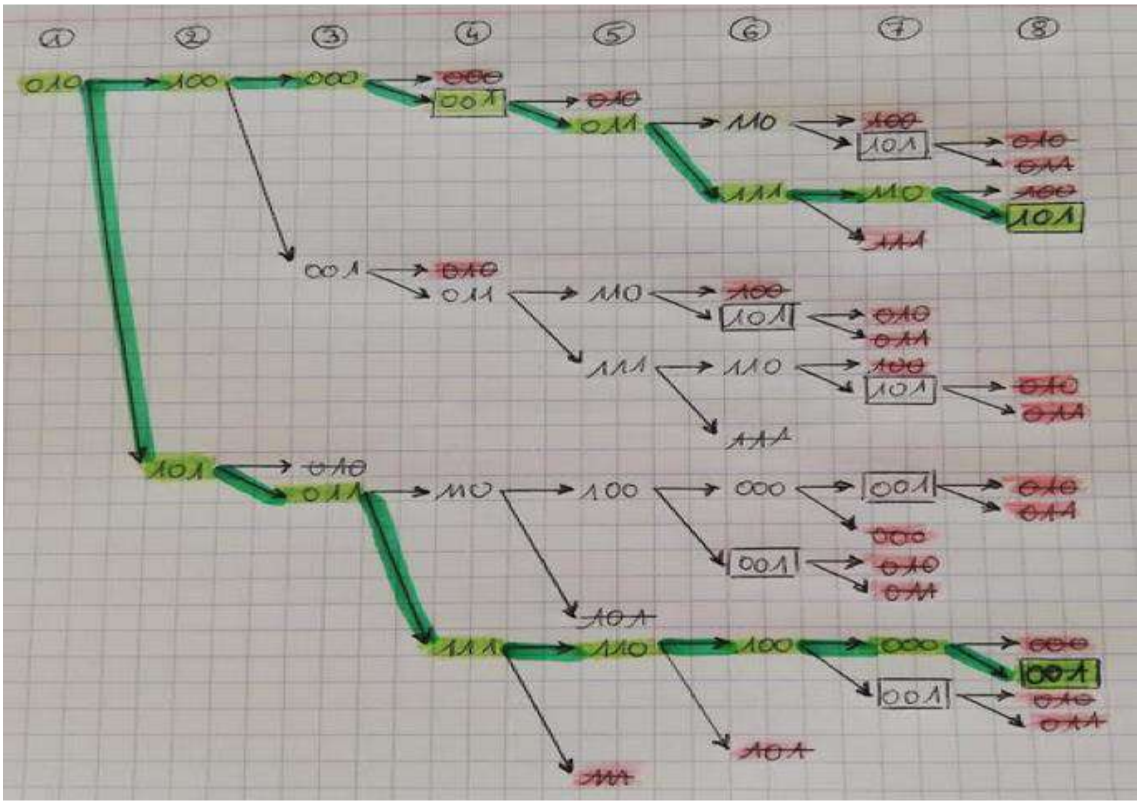
Ainsi on vérifie que de chaque triplet qui représente une unique carte, il part 2 flèches puisqu'on garde les 2 derniers bits du triplet et on ajoute derrière soit **0**, soit **1**.

Sur cet arbre, on trouve 2 et seulement 2 rangements possibles des 8 triplets, ceux qui suivent les triplets et les flèches en vert.

- (**000**) – (**001**) – (**010**) – (**101**) – (**011**) – (**111**) – (**110**) – (**100**)
- (**000**) – (**001**) – (**011**) – (**111**) – (**110**) – (**101**) – (**010**) – (**100**)

On voit aussi que l'on peut trouver des rangements avec moins de cartes 7, 6, 5 ou 4 cartes dans les chemins qui se terminent par le triplet (**100**) encadré avant le 8ème triplet. (1)

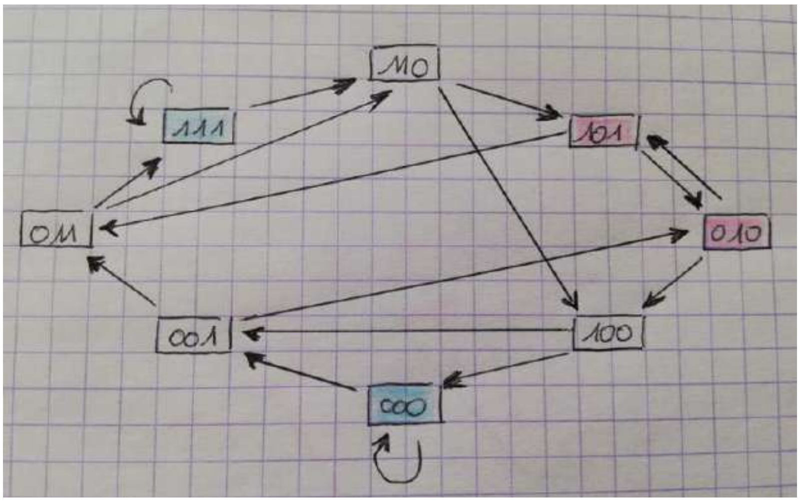
On a refait un arbre en commençant cette fois-ci par le triplet (**010**).
L'allure de l'arbre est différente mais on retrouve en vert sur l'arbre, exactement les 2 mêmes rangements seulement des 8 triplets, donc des 8 cartes qu'avec l'arbre précédent.



On voit aussi qu'il est possible d'avoir des rangements avec moins de cartes.

● Nous avons alors construit **un graphe** où chaque sommet est un triplet représentant une carte et il y a **un arc** entre 2 triplets si et seulement si les 2 derniers bits d'un triplet sont exactement les 2 premiers bits du triplet suivant.

En cercle nous avons placé un des deux rangements de l'arbre et nous avons complété les arcs manquants.



- Pour chaque sommet, il y a 2 arcs entrants et 2 arcs sortants.

- On ne voit pas sur le graphe qu'il n'y a que 2 et seulement 2 rangements possibles des 8 cartes comme on le voit bien sur l'arbre.

- En revanche, on y voit bien que l'on peut supprimer le triplet (**000**) c'est-à-dire le 7 de carreau dans le jeu et obtenir un rangement de 7 cartes seulement.
De même pour le triplet (**111**) qui représente le 8 de trèfle.
On peut supprimer ces 2 cartes ensemble et obtenir un rangement de 6 cartes.

- On peut aussi supprimer les 2 triplets « contraires » (**010**) et (**101**) qui représentent le 7 de cœur et le 8 de pique et obtenir un autre rangement de 6 cartes.

- On peut supprimer ces 4 cartes ensemble et obtenir un rangement de 4 cartes.

● On a repris le rangement suivant des 8 cartes :

(**000**) – (**001**) – (**011**) – (**111**) – (**110**) – (**101**) – (**010**) – (**100**)

On a alors remarqué **un algorithme** pour trouver ce rangement.

On note le triplet (0 0 0)
<u>Pour trouver le triplet suivant</u>, on supprime le 1er bit, on garde tous les suivants et on ajoute derrière :
→ 1 si le triplet alors obtenu n'est pas déjà noté,
→ 0 sinon.
On trouve et on note le triplet (0 0 1) et on recommence la boucle jusqu'à ce que tous les 8 triplets différents soient notés.

Remarque : Dans la suite de l'article, cet algorithme va bien nous servir pour trouver un rangement d'un jeu de 16 cartes avec des quadruplets ou de 32 cartes avec des quintuplets et même de 64 cartes avec des sextuplets. Il fonctionne bien, il nous permet de trouver les rangements avec méthode et sans retour en arrière.

b) Puis on a repris le même travail avec **un jeu de 16 cartes**, les 7, 8, 9 et 10 dans les 4 enseignes.

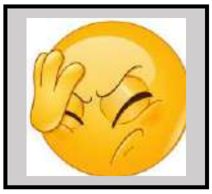
● Les 16 cartes sont codées par les 16 quadruplets différents composés de **0** et **1** de la manière suivante :

Les 2 premiers bits pour l'enseigne comme on l'a déjà défini,
Les 2 derniers bits pour la valeur de la carte, **01** pour le 7, **10** pour le 8, **11** pour le 9 et **00** pour le 10.

Ainsi par exemple : (**0010**) représente le 8 de carreau et (**1100**) le 10 de trèfle

● La règle de rangement des cartes est toujours la même :
2 cartes ne se suivent dans le jeu que si les 3 derniers bits du quadruplet représentant la 1ère carte sont les 3 premiers bits du quadruplet représentant la carte suivante dans le jeu.

● On a alors établi **un arbre** de toutes les possibilités.
Ce fut très très long ! Une demi-journée d'écriture !!!!
On ne pourra le faire pour 32 cartes !!!!!!



Sur cet arbre, on a trouvé exactement 16 rangements différents du jeu de cartes.
On les a représentés ici par des suites de **0** et de **1**.
Chaque fenêtre de longueur 4 qui se déplace pas à pas sur une des suites nous donne tous les 16 quadruplets composés de **0** et de **1** différents et détermine un rangement du jeu de 16 cartes.

1) 0000100110101111
2) 0000100111101011
3) 0000101001101111
4) 0000101001111011
5) 0000101100111101
6) 0000101101001111
7) 0000101111001101
8) 0000101111010010
9) 0000110010111101
10) 0000110100101111
11) 0000110101111001
12) 0000110111100101
13) 0000111100101101
14) 0000111101001011
15) 0000111101011001
16) 0000111101100101

Dans chaque suite, on a mis en évidence le quadruplet (**0 0 0 0**) en jaune et le quadruplet (**1 1 1 1**) en bleu pour nous assurer que toutes les suites étaient différentes.

La dernière suite **0000111101100101** nous donne le rangement suivant des 16 quintuplets différents composés de **0** et de **1** :

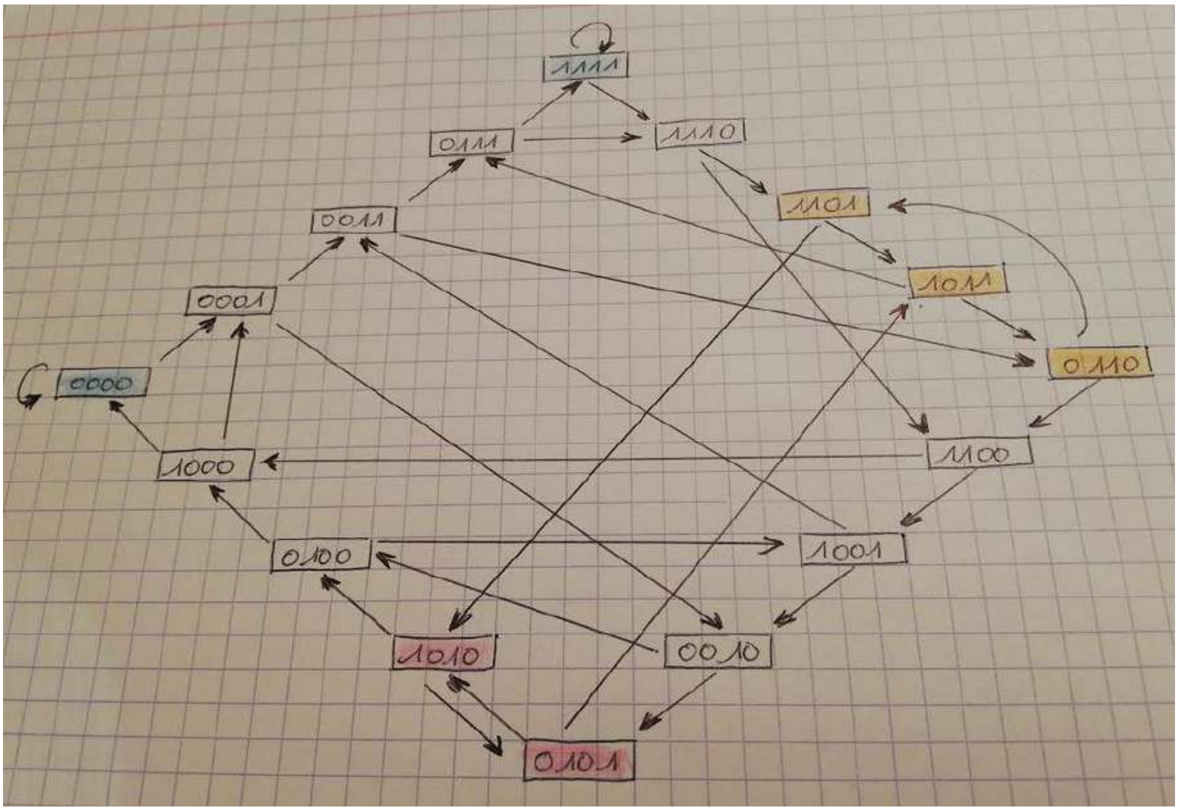
(**0000**) – (**0001**) – (**0011**) – (**0111**) – (**1111**) – (**1110**) – (**1101**) – (**1011**) –
(**0110**) – (**1100**) – (**1001**) – (**0010**) – (**0101**) – (**1010**) – (**0100**) – (**1000**).

Ce rangement correspond à celui que l'on aurait obtenu avec notre algorithme, à savoir

On note le quadruplet (0 0 0 0)
<u>Pour trouver le quadruplet suivant</u>, on supprime le 1^er^ bit, on garde tous les suivants et on ajoute derrière :
→ 1 si le quadruplet alors obtenu n'est pas déjà noté,
→ 0 sinon.
On trouve et on note le quadruplet (0 0 0 1) et on recommence la boucle jusqu'à ce que tous les 16 quadruplets différents soient notés.

● Nous avons alors construit **un graphe** avec les mêmes règles que précédemment avec les 16 quadruplets.

En cercle nous avons placé le rangement des quadruplets obtenu avec l'algorithme et nous avons complété les arcs manquants (il y a **un arc** entre 2 quadruplets si et seulement si les 3 derniers bits d'un quadruplet sont exactement les 3 premiers bits du quadruplet suivant).



- Pour chaque sommet, il y a 2 arcs entrants et 2 arcs sortants.
- On ne voit pas du tout sur le graphe les seuls 16 rangements possibles des quadruplets.
- En revanche, on y voit bien que l'on peut supprimer le quadruplet (**0000**) c'est-à-dire le 10 de carreau dans le jeu et obtenir un rangement de 15 cartes seulement.
De même pour le quadruplet (**1111**) qui représente le 9 de trèfle.
On peut supprimer ces 2 quadruplets ensemble et obtenir un rangement de 14 cartes.

- On peut aussi supprimer les 2 quadruplets « contraires » (**0101**) et (**1010**) qui représentent le 7 de cœur et le 8 de pique et obtenir un autre rangement de 14 cartes.
On peut supprimer ces 4 quadruplets ensemble et obtenir un rangement de 12 cartes.
- On peut aussi supprimer les 3 quadruplets (**1101**), (**1011**) et (**0110**) et obtenir un rangement de 13 cartes.

On peut donc trouver plusieurs rangements du jeu de cartes avec moins de cartes, mais on ne peut enlever n'importe quelle carte comme on veut.
Par exemple, on ne peut enlever seulement le quadruplet (**1000**) , soit le 10 de pique.

c) On reprend alors notre **jeu de 32 cartes** : les As, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi dans les 4 enseignes.

On a vu que la couleur de la carte de coupe et celle des 4 cartes suivantes dans le jeu détermine un quintuplet composé de **0** et de **1.**
Et grâce au codage des cartes déterminé en début d'exposé, ce quintuplet représentera une unique carte.

Par exemple les 5 couleurs **R R N N R** déterminent le quintuplet (**0 0 1 1 0**), où la 1ère couleur citée est celle de la carte de coupe.
Le quintuplet (**0 0 1 1 0**) représente la dame de carreau qui est ainsi la carte de coupe cherchée car le 2 premiers bits **00** désignent un carreau et les 3 derniers **110** une dame.

Pour trouver un rangement des 32 quintuplets, on applique l'algorithme :

On note le quintuplet (0 0 0 0 0)
<u>Pour trouver le quintuplet suivant</u>, on supprime le 1er bit, on garde tous les suivants et on ajoute derrière :
→ 1 si le quintuplet alors obtenu n'est pas déjà noté,
→ 0 sinon.
On trouve et on note le quintuplet (0 0 0 0 1) et on recommence la boucle jusqu'à ce que tous les 32 quintuplets différents soient notés.

On obtient le rangement suivant :

(00000) - (00001) - (00011) - (00111) - (01111) - (11111) - (11110)
(11101) - (11011) - (10111) - (01110) - (11100) - (11001) - (10011)
(00110) - (01101) - (11010) - (10101) - (01011) - (10110) - (01100)
(11000) - (10001) - (00010) - (00101) - (01010) - (10100) - (01001)
(10010) - (00100) - (01000) - (10000)

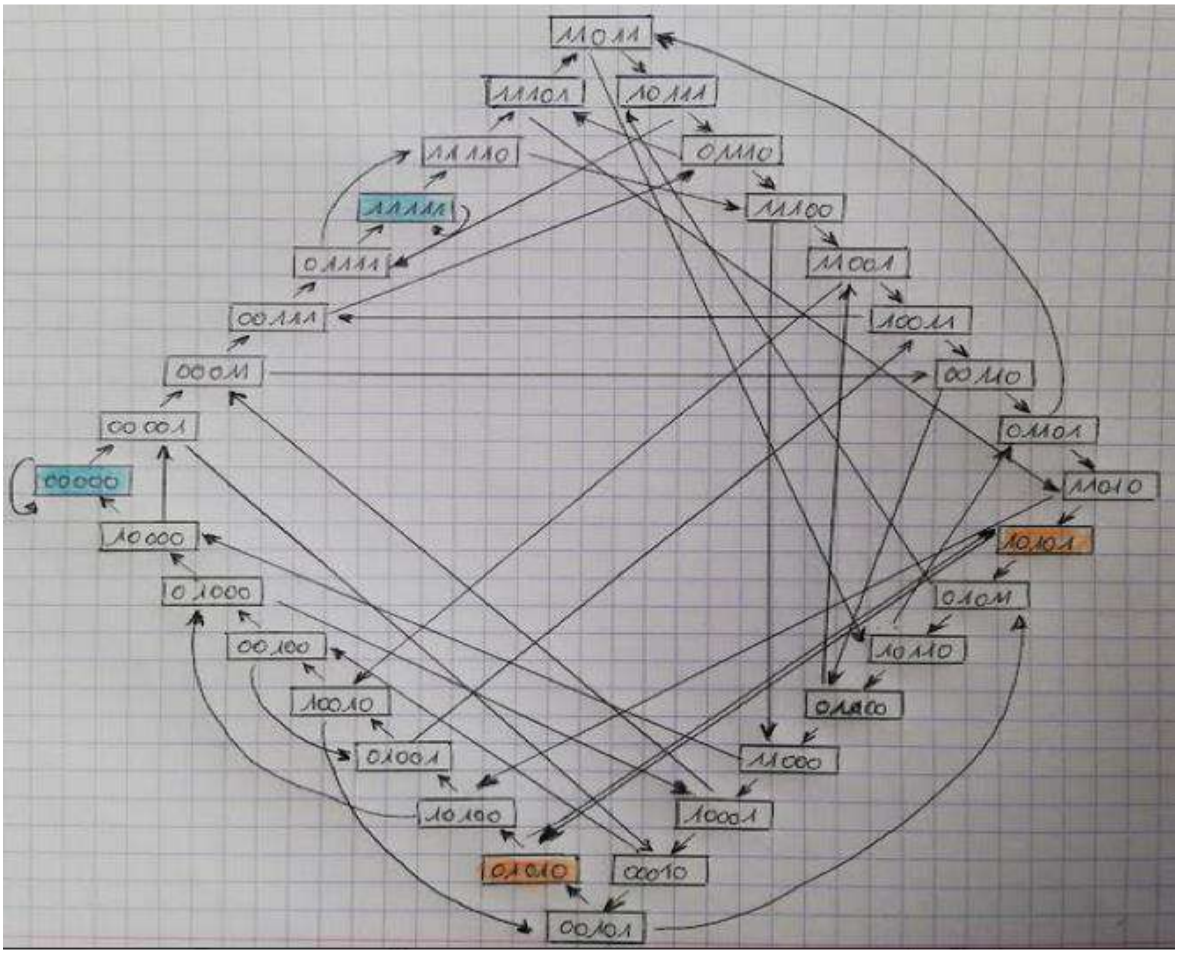
Grâce au codage des cartes, chaque quintuplet cité détermine une carte et une seule, on trouve donc un rangement du jeu de 32 cartes cités.

(**00000**) l’as de carreau
(**00001**) le 7 de carreau
(**00011**) le 9 de carreau
(**00111**) le roi de carreau
(**01111**) le roi de cœur
(**11111**) le roi de trèfle
(**11110**) la dame de trèfle
(**11101**) le valet de trèfle
(**11011**) le 9 de trèfle
(**10111**) le roi de pique
(**01110**) la dame de cœur

(**11100**) le 10 de trèfle
(**11001**) le 7 de trèfle
(**10011**) le 9 de pique
(**00110**) la dame de carreau
(**01101**) le 10 valet de cœur
(**11010**) le 8 de trèfle
(**10101**) le valet de pique
(**01011**) le 9 de cœur
(**10110**) la dame de pique
(**01100**) le 7 de pique
(**11000**) l’as de trèfle

(**10001**) le 7 de pique
(**00010**) le 8 de carreau
(**00101**) le valet de carreau
(**01010**) le 8 de cœur
(**10100**) le 10 de pique
(**01001**) le 7 de cœur
(**10010**) le 8 de pique
(**00100**) le 10 de carreau
(**01000**) l’as de cœur
(**10000**) l’as de pique

● On a alors construit **un graphe** en plaçant la suite des 32 quintuplets rangés ci-dessus en cercle et en complétant tous les arcs manquants (il y a un arc entre 2 quintuplets si et seulement si les 4 derniers bits d’un quintuplet sont exactement les 4 premiers bits du quintuplet suivant).



On peut en tirer les mêmes constatations que pour les jeux de 8 et 16 cartes.

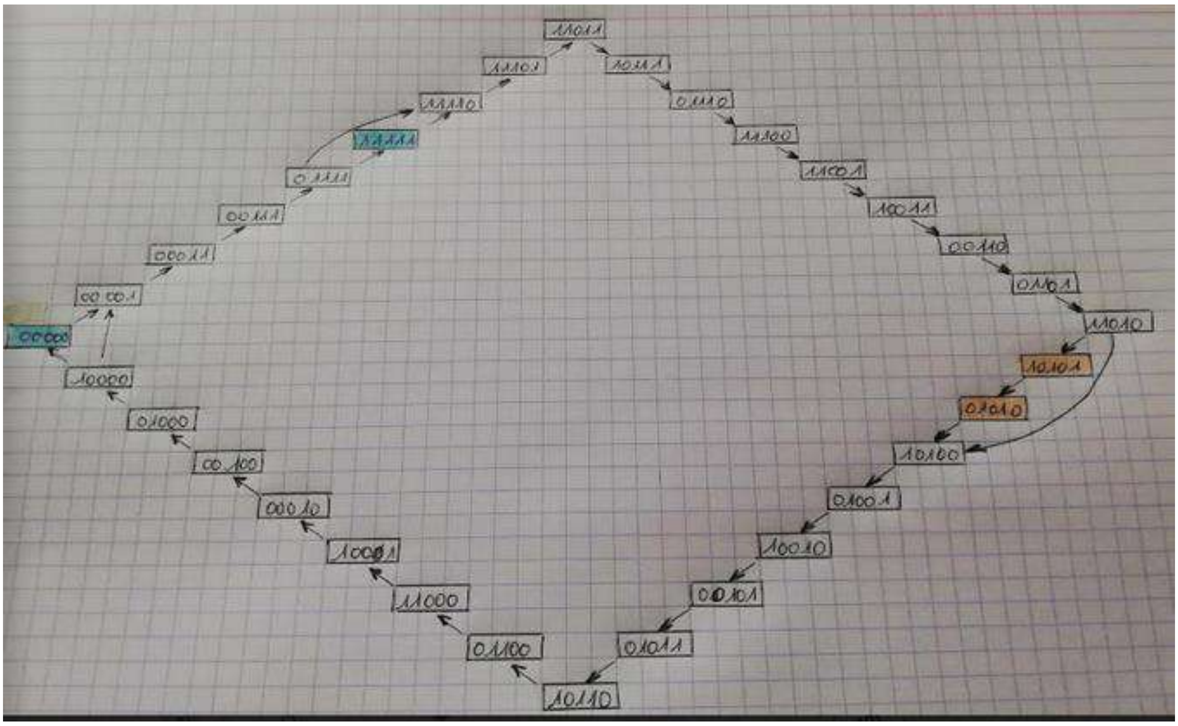
- Pour chaque sommet, il y a 2 arcs entrants et 2 arcs sortants.

- On ne voit pas bien sur le graphe les rangements possibles des 32 quintuplets, excepté celui de notre algorithme mis en cercle. On sait qu’il y en a beaucoup.

- En revanche, on y voit bien que l’on peut supprimer le quintuplet (**00000**) c’est-à-dire l’as de carreau dans le jeu et obtenir un rangement de 31 cartes seulement.
De même pour le quintuplet (**11111**) qui représente le roi de trèfle.
On peut supprimer ces 2 cartes ensemble et obtenir un rangement de 30 cartes.

- On peut aussi supprimer les 2 quintuplets « contraires » (**01010**) et (**10101**) qui représentent le 8 de cœur et le Valet de pique et obtenir un autre rangement de 30 cartes.

- Le graphe nous a permis de trouver un nouveau rangement des 32 quintuplets où on y voit bien les cartes bien spécifiques que l'on peut enlever sans perturber le tour de magie pour obtenir un rangement d'un jeu de 31, 30, 29 ou 28 cartes.



Autre rangement des 32 quintuplets
où l'on discerne bien les cartes que l'on peut enlever.

d) On a alors étendu ce jeu de magie à **un jeu de 64 cartes**.

On a construit ce jeu en transformant un jeu de tarot en créant le 0, le joker dans les 4 enseignes.
Le jeu se compose alors des 16 valeurs (0, as, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, joker, valet, cavalier, dame et roi) dans les 4 enseignes.

● Les 64 cartes sont codées par les 64 sextuplets différents composés de **0** et **1** (le double du nombre de quintuplets) de la manière suivante :

Les 2 premiers bits pour l'enseigne comme on l'a déjà défini,
Les 4 derniers bits pour la valeur de la carte,

0000 pour le 0,
0001 pour l'as,
0010 pour le 2,
0011 pour le 3,
0100 pour le 4,
0101 pour le 5,
0110 pour le 6,
0111 pour le 7,
1000 pour le 8,
1001 pour le 9,
1010 pour le 10,
1011 pour le joker,
1100 pour le valet,
1101 pour le cavalier,
1110 pour la dame,
1111 pour le roi.

Ainsi par exemple : (**001000**) représente le 8 de carreau et (**111101**) le cavalier de trèfle.

● La règle de rangement des cartes est toujours la même :
2 cartes ne se suivent dans le jeu que si les 5 derniers bits du sextuplet représentant la 1ère carte sont les 5 premiers bits du sextuplet représentant la carte suivante dans le jeu.

● L'algorithme suivant permet de ranger les 64 sextuplets.

On note le sextuplet (0 0 0 0 0 0)
<u>Pour trouver le sextuplet suivant</u>, on supprime le 1er bit, on garde tous les suivants et on ajoute derrière :
→ 1 si le sextuplet alors obtenu n'est pas déjà noté,
→ 0 sinon.
On trouve et on note le quintuplet (0 0 0 0 0 1) et on recommence la boucle jusqu'à ce que tous les 64 sextuplets différents soient notés.

On obtient un rangement des 64 sextuplets, donc des 64 cartes à l'aide du codage.

(**000000**) le 0 de carreau
(**000001**) l'as de carreau
(**000011**) le 3 de carreau
(**000111**) le 7 de carreau
(**001111**) le roi de carreau
(**011111**) le roi de cœur
(**111111**) le roi de trèfle
(**111110**) la dame de trèfle
(**111101**) le cavalier de trèfle
(**111011**) le joker de trèfle
(**110111**) le 7 de trèfle
(**101111**) le roi de pique
(**011110**) la dame de cœur
(**111100**) le valet de trèfle
(**111001**) le 9 de trèfle
(**110011**) le 3 de trèfle
(**100111**) le 7 de pique
(**001110**) la dame de carreau
(**011101**) le cavalier de cœur
(**111010**) le 10 de trèfle
(**110101**) le 5 de trèfle
(**101011**) le joker de pique

(**010111**) le 7 de cœur
(**101110**) la dame de pique
(**011100**) le valet de cœur
(**111000**) le 8 de trèfle
(**110001**) l'as de trèfle
(**100011**) le 3 de pique
(**000110**) le 6 de carreau
(**001101**) le cavalier de carreau
(**011011**) le joker de cœur
(**110110**) le 6 de trèfle
(**101101**) le cavalier de pique
(**011010**) le 10 de cœur
(**110100**) le 4 de trèfle
(**101001**) le 9 de pique
(**010011**) le 3 de cœur
(**100110**) le 6 de pique
(**001100**) le valet de carreau
(**011001**) le 9 de cœur
(**110010**) le 2 de trèfle
(**100101**) le 5 de pique
(**001011**) le joker de carreau

(**010110**) le 6 de cœur
(**101100**) le valet de pique
(**011000**) le 8 de cœur
(**110000**) le 0 de trèfle
(**100001**) l'as de pique
(**000010**) le 2 de carreau
(**000101**) le 5 de carreau
(**001010**) le 10 de carreau
(**010101**) le 5 de cœur
(**101010**) le 10 de pique
(**010100**) le 4 de pique
(**101000**) le 8 de pique
(**010001**) l'as de cœur
(**100010**) le 2 de pique
(**000100**) le 4 de carreau
(**001001**) le 9 de carreau
(**010010**) le 2 de cœur
100100) le 4 de pique
(**001000**) le 8 de carreau
(**010000**) le 0 de cœur
(**100000**) le 0 de pique

Le jeu est prêt pour le tour de magie avec 64 cartes ! (2)

Remarque : On voit aussi dans ce rangement que l'on peut supprimer le 0 de Carreau, le roi de trèfle, le 5 de cœur et le 10 de pique ensembles pour obtenir des rangements de 63, 62, 61, ou 60 cartes. Mais on ne peut supprimer au hasard une carte.

En conclusion :

Le codage binaire des cartes, des arbres de possibilités de rangement des cartes, un algorithme de rangement de ces cartes, des graphes nous ont permis de résoudre le problème.

Nous avons trouvé des rangements d'un jeu de 32 cartes de manière à trouver une carte piochée au hasard dans le jeu rien qu'en connaissant sa couleur et celle des 4 cartes suivantes.

Nous avons aussi vu qu'il était possible de supprimer certaines cartes bien précises et faire le tour de magie avec un jeu de 31, 30, 29, 28 cartes et même moins de cartes. Mais on ne peut supprimer une carte au hasard.

Nous savons aussi ranger un jeu de 64 cartes de manière à trouver une carte piochée au hasard dans le jeu rien qu'en connaissant sa couleur et celle des 5 cartes suivantes.

Remerciements

Nous tenons à remercier tous nos partenaires :

- l'association MATh.en.JEANS
- le rectorat
- le collège G. Chepfer
- le FSE du collège Chepfer
- l'INRIA
- l'université de Haute-Alsace
- la région du Grand Est


En amphi le 25/05/23


Hôtel de Ville de Mulhouse

Sans leurs soutiens, le voyage au congrès à la faculté des Sciences de Mulhouse n'aurait pas été possible.

Nous remercions aussi chaleureusement notre chercheuse Marie Duflot-Kremer, pour le choix de ce sujet de recherche, son aide bienveillante tout au long de l'année et son dynamisme.

Notes d'édition

(1) « on voit » : cette remarque aurait pu être détaillée, de même que le passage de 8 à 7 cartes.

(2) Il reste à expliquer comment transposer le tour de magie présenté ici sur un paquet de 32 cartes, à un paquet de 64 cartes.