Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

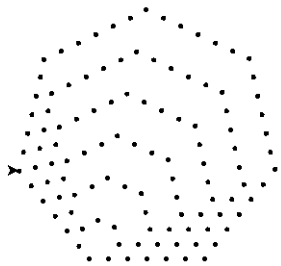
Les nombres polygonaux
Année 2021-2022

Elèves de 2nde : Brodu Elanore, Pouquet Charlotte
Elèves de 3ème : Goyhetche Anna, Labatut Lilas-May, Maniet Lilou.

Encadrés par : Barneix Chantal, Goyhetche Alain
Etablissements : Collège et Lycée Gaston Fébus, Orthez

Chercheur : Monsieur Jacky Cresson, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

1-Présentation :



Nous avons, cette année, étudié les nombres polygonaux. Ces nombres sont représentés sous la forme de polygones réguliers (de 3, 4, 5 côtés ou plus) constitués de points. Le nombre total de ces points correspond au nombre polygonal.
Ci-contre, un nombre heptagonal (7-côtés) de longueur 7 (7 points sur un côté).

Dans une première partie, nous déterminerons comment construire ces nombres polygonaux avec un crayon mais aussi en créant un programme en Python.

Nous avons ensuite, dans une seconde partie, essayé de déterminer des formules permettant de compter le nombre de points d'un nombre polygonal.

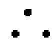
Enfin, nous avons démontré une formule de Diophante puis essayé de développer un programme permettant, dans le cas des nombres triangulaires de trouver toutes les décompositions possibles d'un nombre (Théorème de Fermat).

Partie 1 : Construction de nombres polygonaux :

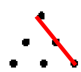
1/ Avec les instruments de géométrie :

1.1 *Premiers nombres polygonaux* :

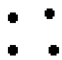
Nombres triangulaires :
Les nombres triangulaires ont la forme de triangles équilatéraux (ci-contre un nombre triangulaire de côté 2).



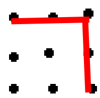
Pour construire un nombre triangulaire de côté 3, il suffit d'ajouter un côté de longueur 3 (en rouge).



Nombres carrés :
De la même façon, on peut dessiner des nombres carrés (ci-contre, un nombre carré de côté 2).



Pour construire les nombres carrés suivants, on ajoute deux côtés (ci-contre nombre carré de côté 3)



Ces premières constructions sont assez simples car elles utilisent des figures simples, que l'on sait construire facilement et depuis longtemps.

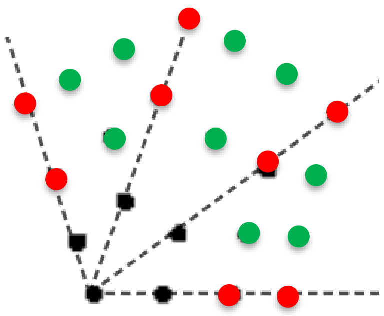
Mais comment construire des nombres polygonaux de plus de 4 côtés ?

1.2 : *Nombres polygonaux de plus de 4 côtés :*

Méthode :

Prenons l'exemple de nombres pentagonaux (5 côtés).

- On trace d'abord un nombre pentagonal de côté 2.
- Pour agrandir ce nombre (c'est-à-dire passer à des nombres polygonaux de côtés 3,4 et plus…) :
    - On choisit un sommet origine (ici le point situé en bas à gauche).
    - On trace les demi-droites reliant ce point aux autres sommets (en pointillés).
    - On place les sommets suivants (points rouges).
    - On complète les côtés par les points situés sur les côtés (points verts).

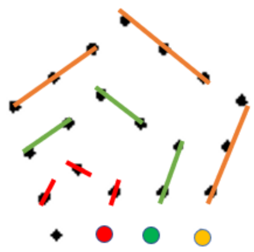


2/ construction à l'aide d'un programme Python :

2.1 Méthode générale :

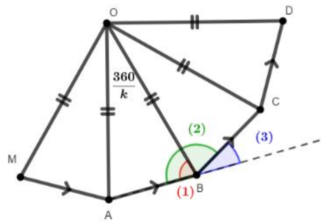
Pour construire un nombre polygonal de $k - côtés$ et de longueur n :

- Construire le nombre polygonal de côté 2
- Ajouter « couche par couche », pour la couche de longueur p :
    - Placer un premier point (rouge / vert / orange sur dessin ci-contre).
    - Dessiner une couche.



2.2 Calcul de l'angle de rotation connaissant le nombre de côtés : k :

La figure ci-contre représente une partie d'un nombre polygonal de $k - côtés$.



On considère un triangle formé par le centre du polygone et deux sommets consécutifs (OAB). Ce triangle est isocèle en O. De plus $\widehat{AOB} = \frac{360}{k}$.

Les angles à la base ont même mesure donc :

$$\widehat{OBA} = \frac{180 - \frac{360}{k}}{2} \quad et \quad \widehat{ABC} = 2 \times \widehat{OBA} = 2 \times \frac{180 - \frac{360}{k}}{2} = 180 - \frac{360}{k}$$

La mesure de l'angle (3) est donc $180 - \left(180 - \frac{360}{k}\right) = \frac{360}{k}$ [1]

L'angle de rotation pour un polygone de $k - côtés$ est : $\frac{360}{k}$

2.3 Comment dessiner une couche ?

Pour chaque couche :

- Dessiner un point.
- Répéter $(k-2)$ fois :
  - Tourner de $\frac{360}{k}$ vers la gauche.
  - Dessiner un segment de points.

2.4 les programmes Python :

Fonction dessinant un point :	Fonction dessinant un segment de points :	Fonction « rotation » :

<pre>def point():
    pendown()
    begin_fill()
    circle(2,steps = 8)
    end_fill()
    penup()</pre>
	<pre>def segment(long):
	    for i in range (long):
	        penup()
	        forward(20)
	        point()
	        penup()</pre>
		<pre>def tourner(co):
		    left(360/co)</pre>

Programme principal :

```
hideturtle()
goto(0,0)
point()

if (l>1):
    for k in range(1,l):
        goto(0+20*(k),0)
        point()
        for i in range(c-2):
            tourner(c)
            segment(k)
        for i in range(2):
            tourner(c)
```

Partie 2 : Nombres polygonaux et Sommes d'entiers :

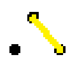
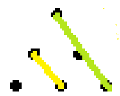
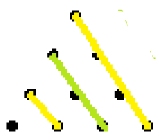
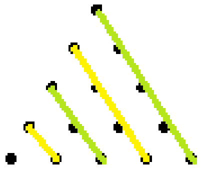
Dans toute la suite de l'article, on notera $P_{k,n}$ le nombre polygonal à :

- k *côtés*
- De longueur n

1/ Première Formule :

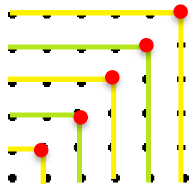
1.1 *Nombres triangulaires :*

On peut décomposer tout nombre triangulaire en « couches » de côtés (ici dessinés en jaune et vert)

$P_{3,2}$	$P_{3,3}$	$P_{3,4}$	$P_{4,4}$
			
$P_{3,2}=1+2$	$P_{3,3}=1+2+3$	$P_{3,4}=1+2+3+4$	$P_{3,5}=1+2+3+4+5$

On en déduit la formule : $\boxed{P_{3,n}=1+2+3+\cdots+n}$

1.2 *Nombres carrés :*



On utilise la même technique pour décomposer un nombre carré. On ajoute cette fois deux segments de points. Mais dans ce cas, un point est ajouté deux fois : le sommet situé en haut à droite (points en rouges).

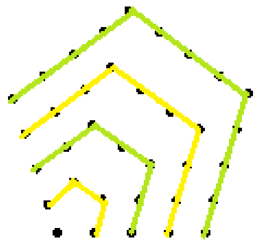
On en déduit le tableau suivant :

Couches	Points ajoutés	Total de points

2	$2 \times 2 - 1 = 3$	$P_{4,2} = 1 + 3$
3	$2 \times 3 - 1 = 5$	$P_{4,3} = 1 + 3 + 5$
4	$2 \times 4 - 1 = 7$	$P_{4,4} = 1 + 3 + 5 + 7$
n	$2 \times n - 1$	$P_{4,n} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 2n - 1$

On en déduit la seconde formule : $\boxed{P_{4,n} = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1}$

1.3 Nombres pentagonaux.



Cette fois, à chaque étape, trois segments sont ajoutés mais deux points sont comptés en double.

On en déduit le tableau suivant :

Couches	Points ajoutés	Total de points
2	$3 \times 2 - 2 = 4$	$P_{5,2} = 1 + 4$
3	$3 \times 3 - 2 = 7$	$P_{5,3} = 1 + 4 + 7$
4	$3 \times 4 - 2 = 10$	$P_{5,4} = 1 + 4 + 7 + 10$
n	$3 \times n - 2$	$P_{5,n} = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 3n - 2$

On en déduit la troisième formule : $\boxed{P_{5,n} = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 3n - 2}$

1.4 Cas général :

En regroupant les résultats précédents :

Côtés	Côté(s) ajouté(s)	Points sur un côté	Sommets en double	Points ajoutés par couche	Formule
3	1	n	0	n	$P_{3,n} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
4	2	n	1	$2n - 1$	$P_{4,n} = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1$
5	3	n	2	$3n - 2$	$P_{5,n} = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 3n - 2$

On remarque que si $+k$ est le nombre de côtés alors, à chaque couche :

- On ajoute $k - 2$ côtés.
- Il y a $k - 3$ sommets comptés deux fois.

Donc

Côtés	Côté(s) ajouté(s)	Points sur un côté	Sommets en double	Points ajoutés par couche
k	$k - 2$	n	$k - 3$	$(k - 2)n - (k - 3)$

D'où la première formule générale :

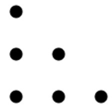
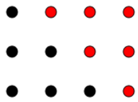
$$\boxed{P_{k,n} = (k-2) \times 1 - (k-3) + (k-2) \times 2 - (k-3) + \cdots + (k-2) \times n - (k-3)}$$

Cette formule est bien trop longue et ne permet pas de calculer rapidement des nombres polygonaux. Nous allons donc maintenant essayer de trouver des formules plus simples.

2/ Une seconde formule :

2.1 Nombres triangulaires :

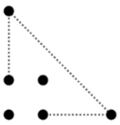
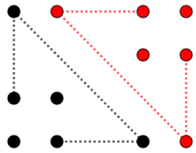
Premier exemple : $P_{3,3}$

On dessine ce nombre triangulaire sous la forme d'un triangle rectangle isocèle.	On colle à ce triangle le même triangle (rouge). On obtient ainsi un rectangle.
	

Le nombre de points dans ce rectangle est 4×3. Ce nombre correspond aussi au double du nombre triangulaire $P_{3,3}$.

Donc $2 \times P_{3,3} = 4 \times 3$; $P_{3,3} = \frac{4\times3}{2}$

Cas général : $P_{3,n}$

Triangle rectangle et isocèle. Les deux côtés ont pour mesure n	On colle à ce triangle le même triangle (rouge). Les dimensions du rectangle sont n *et* $n+1$
	

Le nombre de points dans ce rectangle est $n \times (n+1)$. Ce nombre correspond aussi au double du nombre triangulaire $P_{3,n}$.

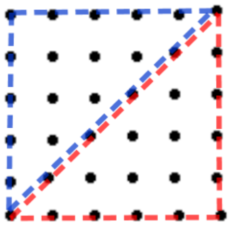
Donc $2 \times P_{3,n} = n(n+1) \quad et$

$$\boxed{P_{3,n} = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Cette formule est très importante. Dans toute la suite, nous décomposerons les nombres polygonaux en nombres triangulaires.

2.2 Nombres carrés :

Premier exemple : $P_{4,6}$



Ce nombre carré est décomposé en deux nombres triangulaires $P_{3,6}$
Mais un côté est compté deux fois (diagonale).

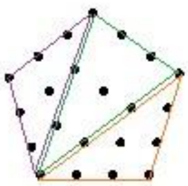
Le nombre de points est donc $2 \times P_{3,6} - 6 = 2 \times \frac{6\times7}{2} - 6 = 36$

Cas général : $P_{4,n}$
De la même façon, ce nombre sera décomposé en deux nombres triangulaires $P_{3,n}$
Mais un côté de longueur n est compté deux fois.

Le nombre total de points est donc $2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2$

2.3 Nombres pentagonaux.

Premier exemple : $P_{5,4}$



Ce nombre est décomposé en trois nombres triangulaires $P_{3,4}$
Mais deux côtés sont comptés deux fois.

Le nombre de points est donc $3 \times P_{3,6} - 2 \times 4 = 3 \times \frac{4\times5}{2} - 2 \times 4 = 30 - 8 = 22$

Cas général : $P_{5,n}$
De la même façon, ce nombre sera décomposé en trois nombres triangulaires $P_{3,n}$
Mais deux côtés de longueur n sont comptés deux fois.
Le nombre de points est donc $3 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{3n(n+1)}{2} - \frac{4n}{2} = \frac{3n^2+3n-4n}{2} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

$$\boxed{P_{5,n} = \frac{n(3n-1)}{2}}$$

2.4 Formule générale

Nous allons encore une fois rechercher une correspondance entre le nombre de côtés du polygone, le nombre de triangles et le nombre de côtés comptés en double.

Côtés	Triangle(s)	Côté(s) en double	Formule
3	1	0	$P_{3,n} = \frac{n(n+1)}{2}$
4	2	1	$P_{4,n} = n^2$
5	3	2	$P_{5,n} = \frac{n(3n-1)}{2}$

On remarque cette fois-ci que l'on passe :
- Du nombre de côtés au nombre de triangles en enlevant 2.
- Du nombre de côtés au nombre de côtés en double en enlevant 3.

On en déduit alors le cas général :

Côtés	Triangle(s)	Côté(s) en double	Formule
k	$k-2$	$k-3$	$P_{k,n} = (k-2)\frac{n(n+1)}{2} - (k-3)n$

Seconde formule générale : [2]

$$\boxed{P_{k,n} = (k-2)\frac{n(n+1)}{2} - (k-3)n}$$

3/ Troisième formule :

Nous allons maintenant essayer de simplifier cette formule :

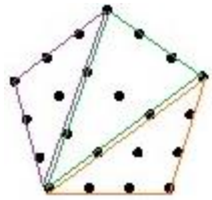
$$P_{k,n} = (k-2)\frac{n(n+1)}{2} - (k-3)n$$
$$= (k-2)\frac{n(n+1)}{2} - [(k-2)-1]n$$
$$= (k-2)\frac{n(n+1)}{2} - (k-2)n + n$$
$$= \frac{(k-2)n(n+1)}{2} - \frac{(k-2)n \times 2}{2} + n$$

$$P_{k,n} = (k-2)n\left[\frac{n+1}{2} - \frac{2}{2}\right] + n$$
$$= (k-2)n\frac{n-1}{2} + n$$
$$= (k-2)\frac{(n-1)n}{2} + n$$

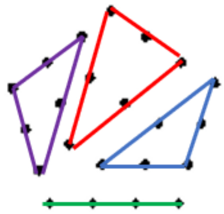
Troisième formule générale :

$$\boxed{P_{k,n} = (k-2)\frac{(n-1)n}{2} + n}$$

Interprétation géométrique : Exemple $P_{5,4}$



D'après la seconde formule : $P_{5,4}$ se décompose en trois nombres triangulaires de côté 4. Mais on doit enlever deux côtés de longueur 4.



Avec la troisième formule, on obtient une autre décomposition :

$$P_{5,4} = 3 \times \frac{3 \times 4}{2} + 4$$

Décomposition : trois nombres triangulaires de côté 3 + un côté de longueur 4 (vert).

<u>**Partie 3 : Deux autres formules :**</u>

<u>***1/ Formule de Diophante :***</u>

Les enseignants nous ont demandé compléter ce tableau :

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
$k=3$ (triangulaire)	1	3	6	10	15	21
$k=4$ (carré)	1	4	9	16	25	36
$k=5$ (pentagone)	1	5	12	22	35	51
$k=6$ (hexagone)	1	6	15	28	45	66
$k=7$ (heptagone)	1	7	18	34	55	81

Ils nous ont ensuite demandé de trouver une relation liant trois nombres dont un sera toujours un nombre triangulaire.

Nous avons remarqué qu'un nombre polygonal était égal à la somme :

- Du nombre situé au-dessus de lui
- Et du nombre triangulaire correspondant à la colonne placée à sa gauche.

Exemples : $7 = 6 + 1$; $18 = 15 + 3$: $28 = 22 + 6$; $51 = 36 + 15$

La formule générale serait alors : $P_{k,n} = P_{k-1,n} + P_{3,n-1}$

Formule de Diophante : $\boxed{P_{k,n} = P_{k-1,n} + P_{3,n-1}}$

Démonstration :

En utilisant la troisième formule de la partie 2 :

$$P_{k-1,n} = (k-3)\frac{(n-1)n}{2} + n \qquad et \qquad P_{3,n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

En additionnant ces deux termes :

$$(k-3)\frac{(n-1)n}{2}+n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\,[\,(k-3)+1]+n=\frac{n(n-1)}{2}(k-2)+n=P_{k,n}$$

2/ Théorème de Fermat :

2.1 Enoncé du théorème :

Tout entier est égal à la somme d'au plus k nombres $k-gonaux$ (de k côtés)

Par exemples :

- En somme d'au plus 3 nombres triangulaires.
- En somme d'au plus 4 nombres carrés.
- En somme d'au plus 5 nombres polygonaux.
- …

Nous ne savons pas démontrer cette formule, par-contre, nous allons essayer de créer un programme qui cherchera les décompositions en au plus 3 nombres triangulaires.

2.2 Fonction déterminant la liste des premiers nombres triangulaires :

En entrée de cette fonction : le nombre limite, la fonction devra déterminer tous les nombres triangulaires inférieurs à cette limite.

La variable « i » est initialisée à 1. La liste « tab » est pour l'instant vide (mais contiendra les nombres triangulaires)

On crée une boucle : tant que les nombres triangulaires seront inférieurs à la limite, on les calcule en utilisant la formule $\frac{i(i+1)}{2}$ et on les stocke dans « tab ».

```python
def listenombres(limite):
    tab = []

    i = 1
    while (i*(i+1))/2 <= limite :

        tab.append(int((i*(i+1))/2))
        i=i+1
    return tab
```

2.3 Premier exemple : décomposition de 24 :

24 n'est pas un nombre triangulaire. Mais il est égal à deux sommes : $21+3 \quad mais\ aussi \quad 3+6+15$

2.4 Principe de l'algorithme :

Trois remarques :

- Il peut exister plusieurs décompositions en somme de deux ou trois termes. De plus le nombre à décomposer peut-être un nombre triangulaire. Nous allons donc utiliser trois variables i_1, i_2, i_3 .
- « t » est la liste contenant les nombres triangulaires.
- Afin de ne pas trouver des décompositions en double, les nombres triangulaires devront toujours apparaître dans l'ordre croissant.

$t[i_1]$ devra parcourir tous les nombres de la liste.

Pour chaque i_1 :

- On regarde si $t[i_1]$ est le nombre recherché.
- i_2 parcourt tous les entiers de i_1 à la fin de la liste.
    - Pour chaque i_2 :
        - On regarde si $t[i_1]+t[i_2]$ est égal au nombre recherché.
        - $i_3$parcourt les entiers de i_2 à la fin de la liste.
            - On vérifie si $t[i_1]+t[i_2]+t[i_3]$ est égal au nombre recherché.

2.5 Application de l'algorithme à la décomposition de 21 :

Etape : $\boldsymbol{t[i_1] = 1\ et\ t[\,i_2] = 1}$:

$t[i_1]$ n'est pas égal à 21.
$t[i1\,] + t[i_2]$ est aussi différent de 21.
On vérifie ensuite toutes les sommes $t[i_1] + t[i_2] + t[i3]$
Pas de solution.

i_1 :	1	3	6	10	15	21
i_2 :	1	3	6	10	15	21
i_3 :	1	3	6	10	15	21

Etape : $\boldsymbol{t[i_1] = 1}$; $\boldsymbol{t[i_2] = 10}$:
$t[i1\,] + t[i_2]$ est différent de 21.
On vérifie ensuite toutes les sommes $t[i_1] + t[i_2] + t[i3]$
Une solution.

i_1 :	1	3	6	10	15	21
i_2 :	1	3	6	10	15	21
i_3 :	1	3	6	10	15	21

Etape : $\boldsymbol{t[i_1] = 6}$; $\boldsymbol{t[i_2] = 15}$:
$t[i_1]$ n'est pas égal à 21.

$t[i1\,] + t[i_2]$: une solution

On vérifie ensuite toutes les sommes $t[i_1] + t[i_2] + t[i3]$
Pas de solution.

i_1 :	1	3	6	10	15	21
i_2 :	1	3	6	10	15	21
i_3 :	1	3	6	10	15	21

2.6 Programme principal :

```
for i1 in range(limite) :

    if t[i1] == cible : # C'est un nombre triangulaire
        print(t[i1])
    for i2 in range(i1, limite):  #i2 compris entre i1 et la fin
        if t[i1]+t[i2] == cible :
            print(t[i1], " ; ", t[i2])

        for i3 in range (i2,limite): # on teste avec trois nombres
            if t[i1]+t[i2]+t[i3] == cible :
                print(t[i1], " ; ", t[i2], " ; ", t[i3])
```

NOTES DE L'ÉDITION

[1] Cette formule est celle habituellement utilisée pour l'angle extérieur d'un polygone régulier. Elle peut être trouvée dans tout manuel de géométrie. Il n'est pas nécessaire de la recalculer en détail.

Dans le travail, il existe d'autres formules qui sont bien connues, par exemple, les égalités $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2$. Dans ces cas, il pourrait être intéressant de préciser comment ces formules sont obtenues. Il serait également utile d'observer que certaines formules connues sont établies dans ce travail.

[2] Puisque nous avons démontré que la somme des n premiers nombres naturels est $\frac{n(n+1)}{2}$, cette formule peut être déduite de la première formule générale par un simple calcul algébrique.