Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

L'élastique

Année 2022 – 2023

Amrani Hassani Zeyna, Belkhayat Zoukari Alya, Rhmari Tlemçani Lina,
Amouri Mohamed Karim, Guessous Hamza (classe de 3e) et Ben Abbou Adam (classe de 5e)

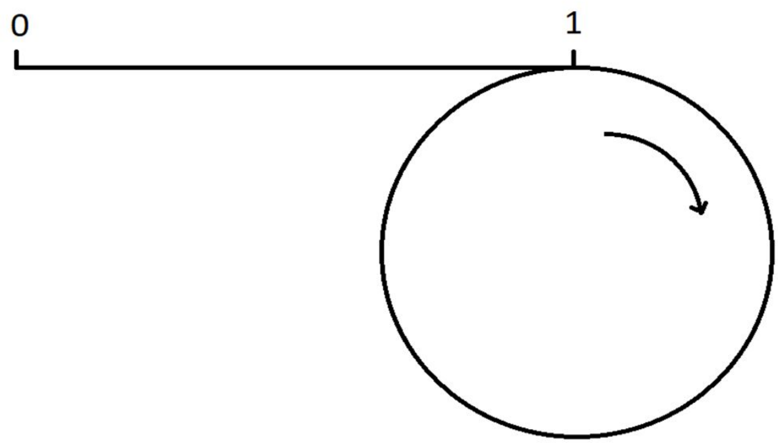
Établissement : GSU La Fontaine de Fès (Maroc) (jumelé avec l'École Alsacienne de Paris)

Encadré·es par : Sébastien Barry

Chercheur : Emmanuel Bernuau (Agro Paris Tech)

1. Présentation du sujet

Voici le sujet que nous avons choisi :



Un élastique est fixé par un bout à un mur tandis que l'autre extrémité est collée à un disque tournant enduit de colle.

Quand le disque tourne, cela produit deux effets :

1) *Toute partie de l'élastique qui entre en contact avec le disque est collée et ne se déforme plus.*
2) *La partie de l'élastique entre le mur et la zone de contact avec le disque s'étire.*

On constate que quand le disque fait un tour complet sur lui-même, 90% de la longueur initiale a été collée au disque.

Questions :

1) ***Si la longueur initiale de l'élastique est 1, quel est le rayon du disque ?***
2) ***Si on dispose régulièrement des nombres sur l'élastique au départ, à quel endroit ces nombres se retrouvent-ils une fois collés ?***

2. Démarche chronologique

1. Compréhension du problème

Ce problème fut difficile à comprendre, une consigne des plus complexe, des questions que nous collégiens ne traitons pas habituellement, un problème destiné aux lycéens.
Des séances sans avancement, sans résultat : que des fausses pistes qui n'aboutissent à rien.

2. Méthode naïve

La première optique du groupe fut de calculer le rayon du cercle avec une distance de 90 cm collée : 90% de la longueur initiale de 1 mètre.
Nous avons pour cela utilisé la formule permettant de calculer la longueur d'un cercle en fonction de son rayon :

$$\text{longueur d'un cercle} = 2\pi \times \text{rayon}$$

Nous nous sommes ensuite rendu compte que cela ne prenait pas en compte le fait que l'élastique s'étire au fur et à mesure que le disque tourne.

3. Réalisation d'une maquette

Puis nous avons voulu tenter une nouvelle approche, une réalisation de maquette. Nous nous sommes munis d'un élastique de 1m et d'un disque de forme circulaire pour s'approcher le plus du problème initial.
Cette option était complexe et nous n'avons pas été en mesure de l'exploiter de façon efficace.

4. Abandon de la part du groupe

Après ces échecs notre moral en a pris un coup et nous avons envisagé de mettre un terme au projet. Nous sommes restés quelques semaines sans avancer, sans même trouver de piste à explorer, toujours au point de départ.

5. Simplification du problème

Enfin, à la suite d'une rencontre à distance avec le chercheur, nous avons décidé de simplifier le problème. Nous avons remplacé le disque par un polygone régulier avec un petit nombre de côtés pour commencer : d'abord un triangle équilatéral, puis un carré.

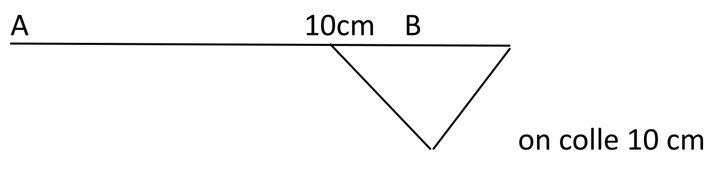
Nous sommes alors parvenus à réaliser nos premiers calculs et à obtenir nos premiers résultats.

3. Résultats obtenus

1. Les premiers calculs

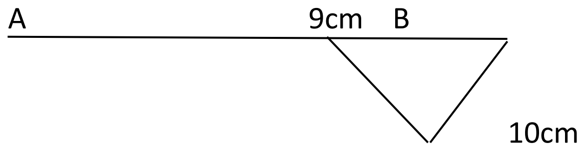
a) Avec un triangle équilatéral de côté 10 cm, on a pu calculer que 27% environ de la longueur initiale de l'élastique est collée au bout d'un tour.

Étape 1 :



Étape 2 :

On étire 90cm en 1m : coefficient k = 100/90
Les dix centimètres que l'on colle correspondent à 10/k de la longueur initiale soit 9 cm



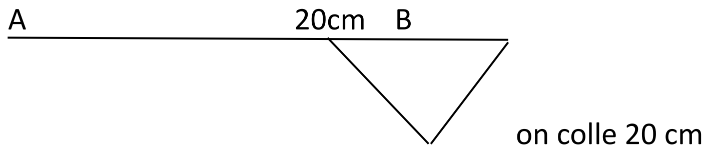
Étape 3 :

On étire 100 - (10+9) = 81 cm en 1 m : k=100/81
Les 10 cm que l'on colle correspondent à 10/k= 8,1 cm de la longueur initiale

10+9+8.1=27,1

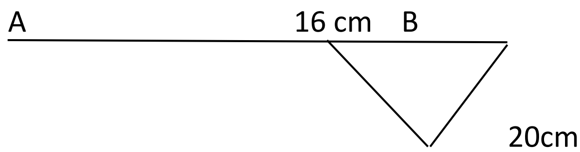
b) Avec un triangle équilatéral de côté 20 cm, 49% de la longueur initiale est collée au bout d'un tour.

Étape 1 :



Étape 2 :

On étire 80 cm en 1m : coefficient k = 100/80.
Les dix centimètres que l'on colle correspondent à 20/k de la longueur initiale soit 16 cm



Étape 3 :

On étire 100 - (20+16) = 64 cm en 1 m : k=100/64.
Les 10 cm que l'on colle correspondent à 20/k=cm de la longueur initiale

20+16+12,8=48,8

c) Avec un carré de côté 10 cm, la même démarche permet de conclure que $10+9+8{,}1+7{,}3=34{,}4\,\%$ environ de la longueur initiale de l'élastique est collée au disque au bout d'un tour complet

$k_1=\frac{100}{90}$ et $\frac{10}{k_1}=9$

$k_2=\frac{100}{100-(10+9)}$ et $\frac{10}{k_2}=8{,}1$

$k_3=\frac{100}{100-(10+9+8{,}1)}$ et $\frac{10}{k_3}=7{,}3$

2. Exploitation de ces résultats

La méthode précédente, par tâtonnements, s’avère un peu fastidieuse. Nous avons donc décidé de créer un programme Scratch afin de pouvoir trouver plus rapidement la longueur approximative de chaque côté de différents polygones, pour atteindre 90% de la longueur initiale de l’élastique collée au bout d’un tour (1).

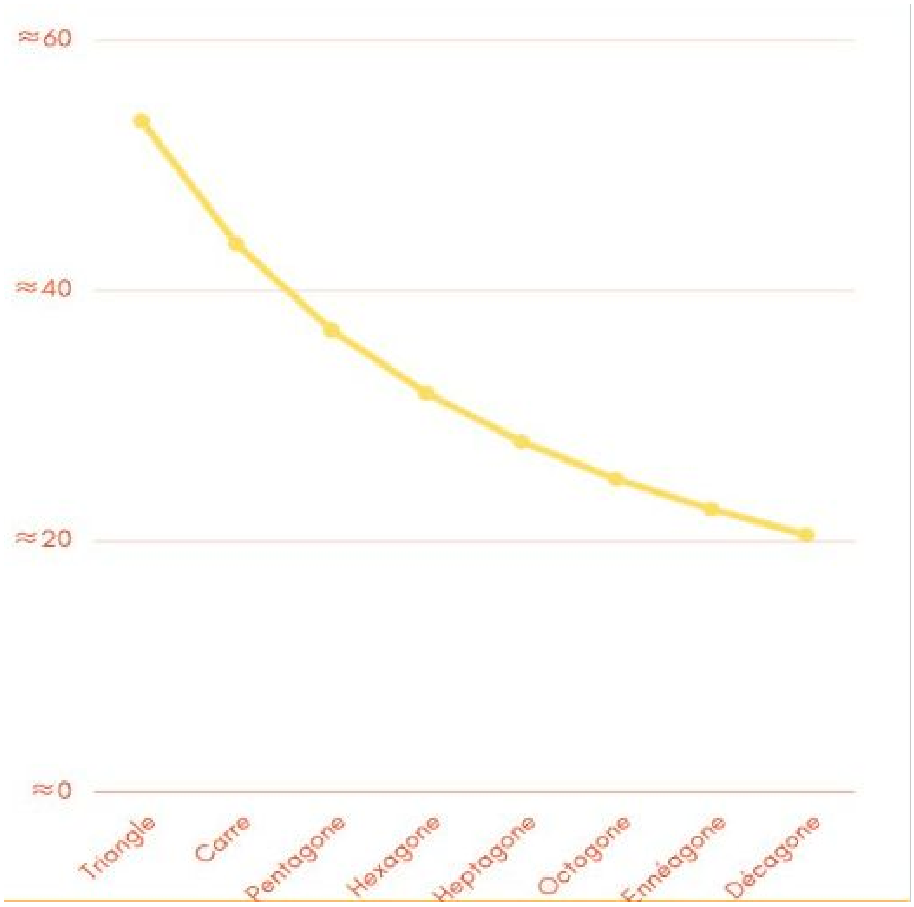
Grâce à ce programme nous avons pu trouver les résultats suivants :

- le triangle équilatéral doit avoir des côtés de 53,584 environ pour que 90% de la longueur initiale de l’élastique soit collée au bout d’un tour.
- pour le carré : ≈ 43,766
- pentagone : ≈ 36,9
- hexagone : ≈ 31,87
- heptagone : ≈ 28
- octogone : ≈ 25
- ennéagone : ≈ 22,6
- décagone : ≈ 20,57

4. Conclusion

Il nous a manqué du temps pour exploiter pleinement ces résultats. Nous n'avons pas pu vraiment en déduire le rayon du disque de départ (2).

À partir de ces données nous avons malgré tout réalisé le graphique suivant, que nous avons malheureusement eu du mal à analyser :



Notes d'édition

(1) Avec le programme Scratch, on procède aussi par tatonnements, sauf que le calcul est fait automatiquement : on entre le nombre de côtés et la longueur d'un côté (en centimètres) ; ensuite la longueur initiale d'élastique collée (variable b) est calculée avec la même méthode que pour les calculs précédents. Il reste alors à ajuster la longueur du côté pour obtenir un résultat aussi proche de 90 que possible.

(2) On peut admettre que lorsqu'on considère un polygone régulier à un grand nombre de côtés, son périmètre est proche de celui du disque recherché. On pourrait donc considérer les périmètres des polygones, en multipliant la longueur trouvée par le nombre de côtés, et ensuite diviser par 2π pour obtenir une approximation du rayon du disque.