Les Polyominos

Année 2022 – 2023

Paul Reynaud, Shahin Benamar, Ailéan Jacquier, élèves de classe 3ème et 5ème

Établissement : Collège Notre Dame du Rocher

Enseignantes : Laurence Barou, Adèle Barbot

Chercheur : Jimmy Garnier, Laboratoire de Mathématiques de l'Université Savoie-Mont-Blanc

1. Présentation du sujet

Cette étude a porté sur les polyominos, dont la première étude systématique fut réalisée en 1953 par S. W. Golomb, et plus particulièrement le cas des pentaminos (polyominos composés de cinq carrés unités). L'utilisation des polyominos fait intervenir des notions de dénombrements, de symétries (centrale et axiale), de calculs de surface et de pavages. Cette étude s'est appuyée sur le jeu du *Kataminos*, dont le but est de créer des regroupements de pentaminos (Fig.1) dans un format donné le plus rapidement possible, en utilisant une seule et unique fois chacun d'eux.

La problématique soulevée est alors la suivante :

Par quelles méthodes peut-on déterminer les différents agencements de pentaminos ?

2. Résultats

Deux notions particulièrement importantes ont ainsi été montrées, à savoir :

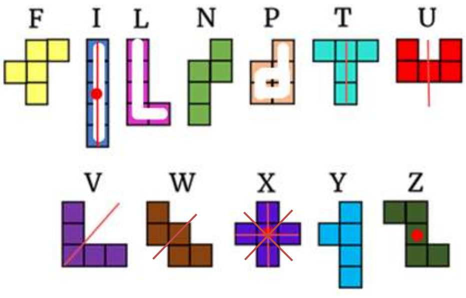
- que l'utilisation d'un pentamino est régit par ses propriétés géométriques intrinsèques, ce qui en donnent la probabilité d'utilisation ;

- que l'on ne peut commencer un agencement avec un pentamino choisi si et seulement si ces propriétés géométriques déterminées à l'avance permettent une telle action .

3. Présentation des recherches

Tout d'abord, leur étude a permis de déterminer leurs propriétés géométriques. Ensuite, le calcul des compléments de *k* (largeur de la surface à couvrir) a été possible grâce à un programme Scratch [5]. Enfin, les recherches ont porté sur l'élaboration d'une formule permettant d'associer à une valeur de *k* le nombre d'agencements possibles.

3.1. Propriétés géométriques des pentaminos



▲ Figure 1 : Noms, formes et propriétés des pentaminos

Ici sont rapportés : le nombre de formes différentes de pentaminos (nous n'en considèrerons ici que seulement 11, la forme I étant exclue des raisonnements présentés par la suite), les centre et axe(s) de symétrie de ceux-ci et leur caractère ou non de polyomino à *forme pleine*[1] (surlignage blanc). Ces propriétés sont particulièrement intéressantes et importantes pour la compréhension du fonctionnement des agencements.

En effet, le caractère de forme pleine offre au pentaminos pourvus de celui-ci la capacité d'être utilisés dans des agencements de format 2*5 [3.3] ; le centre de symétrie déterminant, avec leurs dimensions leur utilisation ; etc.

3.2. Décompositions et regroupements d’agencements

Ces décompositions ont porté sur les valeurs du nombre *k*, afin de pouvoir par la suite réaliser des regroupements d’agencements plus simples et pour faciliter les recherches sur la détermination du nombre d’agencements total pour cette valeur de *k* donnée. En premier lieu, la décomposition a porté sur seulement deux termes. (ex: 10 = 10 + 0 = 9 + 1...).

Puis, par l’élaboration d’un programme Scratch, l’automatisation des décompositions (approche plus précise et exhaustive) a permis d’obtenir des décompositions jusqu’à *k* termes.

Enfin, afin de pouvoir utiliser ces résultats pour les regroupements d’agencements, il a été nécessaire de retirer les termes 1 et 2, puisque les agencements de 1*5 et 2*5 n’ont pas de solution.

3.3.Agencements, regroupement et probabilité d’utilisation

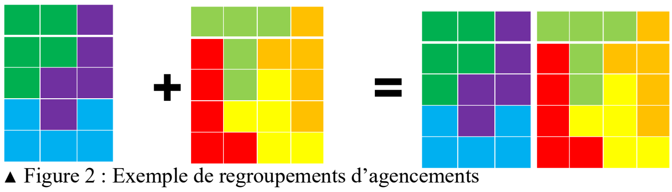
En premier lieu, la recherche d’un maximum d’agencements *spécifiques*[2] (*uniques*[3]) pour des valeurs de *k* allant de 3 à 5 ont donné lieu à la détermination de :

- 7 agencements pour A = 3*5
- Plus d’une trentaine pour A = 4*5
- Plus d’une vingtaine pour A = 5*5 (théoriquement, cette valeur devrait être plus importante que pour 4*5, car la probabilité d’utilisation est plus grande).

Deux propriétés des agencements ont alors pu être observées :

- Tous ces agencements sont spécifiques, ne pouvant être décomposés (qu’à 6*5), car *k* est alors un multiple de 3 (suppression des agencements 1*5 et 2*5) supérieur à 3 (une seule solution pour *k* = 3, soit N = 3 + 0) ;
- Certains agencements sont apparus comme *isomères*[4] entre eux

Par la suite, le regroupement a donné part à de nouveaux agencements pour des valeurs de *k* plus importantes (fig. 2). Il est alors par exemple possible de compléter un agencement de 5*7 à l’aide d’un agencement de 5*4 et de 5*3 regroupés !



▲ Figure 2 : Exemple de regroupements d’agencements

A la suite de l’élaboration de ces listes d’agencements et de leurs regroupements, il a été possible de calculer et ainsi de prédire la présence (ou non) d’un polyominos dans un agencement (selon ces dimensions et la valeur de *k*) et la probabilité qu’il se trouve dans un état donné.

Ainsi, en faisant la somme des différentes positions d’un pentamino, orienté dans un direction *d,* en largeur et hauteur, et de celles de ce même pentamino orienté a *d + 90°*, on obtient la formule :

$$\mathbf{T_{(\mathit{k})} = (5 - L + 1)(\mathit{k} - \mathit{l} + 1) + (5 - \mathit{l} + 1)(\mathit{k} - L + 1)}$$

Avec *l* la largeur du polyominos, L sa longueur et *k* la largeur de la surface à couvrir.

La probabilité pour qu’il se trouve dans l’un de ces états est donc de $P_{(T)} = \dfrac{1}{T_{(k)}}$

[1] Un polyomino est dit à « forme pleine » s’il ne comprend aucun « creux », autrement dit qu’il possède un maximum de carrés-unités concentrés en un minimum d’espace.

[2] Un agencement est dit spécifique s’il ne peut pas être décomposé.

[3] Un agencement est dit unique s’il n’existe pas d’autres agencements pouvant être déduit de celui-ci par isomérie du plan dans un ensemble d’agencements donnés.

[4] Des agencements sont dit isomères s’ils sont constitués des mêmes polyominos et qu’il remplisse une même surface sans toutefois être déduit l’un de l’autre par isomérie du plan.

Cependant, les positions que déterminent $T_{(k)}$ ne sont pas toutes possibles ! Celles possibles sont données par une fonction nommée $U_{(k)}$ (pour l'heure cependant indéterminée), qui considère les dimensions, les formes : le nombre de creux *c*. La valeur de la surface libre la plus grande est :

$$\boldsymbol{S = A - (5p + \Sigma c + hk)}$$

(*A* est la surface, *p* le nombre de pentaminos, *c* le nombre de creux, *h* la hauteur du pentamino le plus proche du « bas » si $L_{(p)} = k$). Elle doit être multiple de 5 pour que le pentamino puisse être potentiellement utilisable, mais il faut aussi tenir compte du centre et des axes de symétrie (s'il y en a).

Le tableau suivant résume les résultats de la fonction $U_{(k)}$ pour $k = 3$.

Polyomino	$U_{(k)}$
P	4
U	2
W	0
X	0
Z	0
V	1
F	1
T	1
Y	2
L	2
N	2

▲Tableau récapitulatif des valeurs de $U_{(k)}$ pour chaque polyomino (pentamino)

La probabilité pour qu'il se trouve d'ans l'un de ces états est donc de $P_{(U)} = \frac{1}{U_{(k)}}$

Enfin, comme vu précédemment, les pentaminos ne sont pas tous utilisables pour toutes les valeurs de *k*. La probabilité pour qu'il se trouve dans l'un de ces états est donc de $P_{(P)} = \frac{k}{P_{(k)}}$ où $P = 2(k+1) - (k-5) \times \left\lfloor 2\frac{k}{11} \right\rfloor$

(le nombre maximum de polyominos de 11 est atteint à 5*5) et sa probabilité de présence dans un état donné est donc de :

$$\boldsymbol{P_{(P)} \times P_{(U)}}$$

Il est ainsi possible de calculer, pour tout pentamino (et pour tout polyomino plus généralement), en fonction de *k,* la probabilité de présence de cette figure dans un agencement. Le premier pentamino utilisé déterminera s'il est possible de le finir avec les différents autres pentaminos choisis, par le biais d'un effondrement des possibilités (diminution de la probabilité d'utilisation).

4. Conclusion

En conclusion, l'étude des propriétés des pentaminos, de leurs utilisations et de leurs propriétés géométriques, ainsi que les agencements pouvant être formés a permis d'approfondir la compréhension du fonctionnement mathématique de ces figures. Leur étude statistique permet également une approche plus numérale.

Il n'a cependant pas été possible de déterminer plus précisément la manière de calculer le nombre précis d'agencements possibles pour des valeurs de *k*.

Néanmoins, quelques pistes sont déjà envisagées :
- l'utilisation des matrices afin de définir les polyominos ;
- le développement d'un programme automatisant cette recherche d'agencements ;
- l'utilisation d'*imbrications élémentaires*[1] de pentaminos, ou affinités.

5. Programmes

https://scratch.mit.edu/projects/823723207 (Programme de création d'agencements en ligne)
https://scratch.mit.edu/projects/821550110 (Programme de décomposition de k en ligne)

[1] Une imbrication élémentaire correspond au rassemblement récurent de plusieurs pentaminos dans des agencements. Ainsi, si l'on choisit un pentamino *a*, il est probable qu'en choisissant le *b* (*a* et *b* formant des imbrications élémentaires) on maximise les chances de réussite.