

# Jeu des 3 couleurs

Barnabé Cuillandre et Emilien Moraglia, classe de 1<sup>ère</sup>

Année 2022-2023

**Établissement(s) :** Lycée de l'Harteloire, Brest

**Enseignant·e :** M. Gourmelon

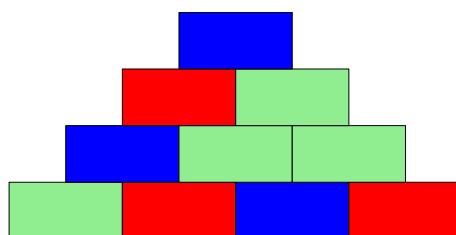
**Chercheur·Chercheuse(s) :** M. Rachid Regbaoui, Université de Bretagne Occidentale

## 1 Présentation du sujet

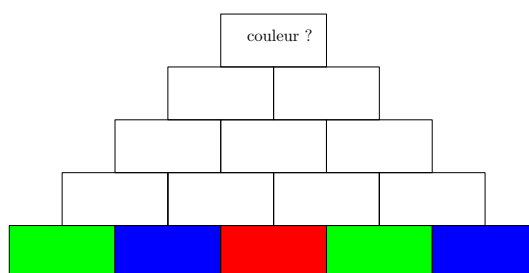
On construit une pyramide avec des légos de 3 couleurs (par exemple : bleu, rouge, vert) en respectant les 2 règles suivantes :

- Au dessus de 2 légos de même couleur on pose un légo de cette même couleur
- Au dessus de 2 légos de couleurs différentes on place un légo de la troisième couleur

Exemple avec une base de 4 légos :



En regardant l'exemple ci-dessus, est-ce qu'on aurait pu deviner la couleur du sommet (bleu) en regardant uniquement les légos de la base? Peut-on deviner la même chose pour des bases de 5, 6, ... légos?



## 2 Résultats

Nous avons trouvé comment obtenir instantanément le sommet de la pyramide, en premier temps avec une base de 4 puis avec des bases de  $3^n+1$ .

### 3 Texte de l'article

#### 3.1 Bases 3 et 4

Tout d'abord, nous avons commencé nos recherches en analysant plusieurs possibilités de base à 3 et 4. Nous avons conjecturé plusieurs hypothèses, par exemple :

- Pour une base de 3, si les 3 couleurs de l'étage 1 sont différentes alors le sommet prendra la couleur de la brique du milieu du premier étage.

- Pour une base de 3, si une couleur  $x$  se trouve à une extrémité de l'étage 1 collée à deux mêmes couleurs  $y$  alors le sommet prendra la couleur de  $x$  (Fig. 1).



FIGURE 1 – Bases de 3

Après avoir étudié toutes les possibilités de la base de 3 nous avons décidé de passer à celle de 4, comme pour celle de 3 nous avons conjecturé quelques hypothèses, en essayant de trouver un lien entre les couleurs des briques de la base et celle du sommet.

Nous avons ainsi remarqué que la base de 4 était particulière : la couleur du sommet s'obtient par la règle de construction de la pyramide à partir des couleurs des deux extrémités de la base (Fig. 2)! Nous l'avons vérifié en testant toutes les bases possibles (cela en faisait 14 à tester).

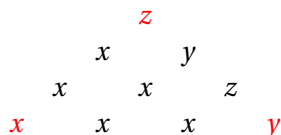


FIGURE 2 – Bases de 4

#### 3.2 Bases supérieures

Au premier regard, nous avons émis l'hypothèse que pour toutes les bases de valeurs  $3 \times n + 1$  il nous suffisait d'« additionner » les extrémités pour déterminer le sommet. Mais après quelques tests, nous avons remarqué que cette méthode ne marche pas pour toutes les possibilités de la base de 7. Alors nous avons émis une autre hypothèse, pour toutes les bases de valeurs  $3^n + 1$ , il nous suffit d'« additionner » les deux extrémités de la base.

Grâce à notre propriété, nous allons vous montrer que nous pouvons immédiatement trouver le sommet de la pyramide, ou alors la diviser en partie de valeur  $3^n + 1$  pour trouver plus rapidement le sommet. Pour trouver directement le sommet, il nous suffit de connaître les couleurs des 2 extrémités et de les additionner pour obtenir la couleur du sommet. Cette méthode ne fonctionne que sur les bases de valeur  $3^n + 1$  car on peut alors voir des pyramides de bases 4 que l'on rassemble par groupes de 3, puis 3, etc. (Fig. 3)

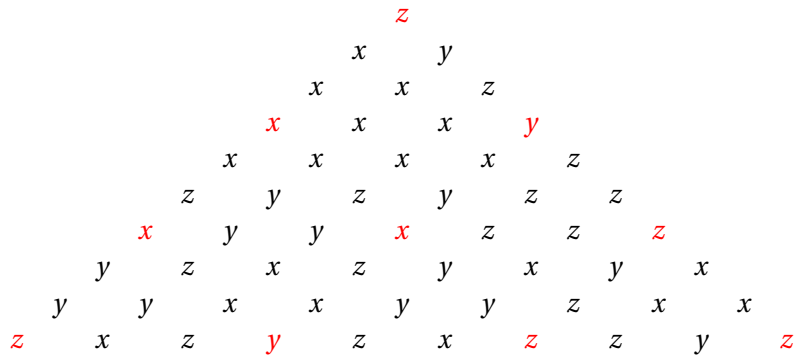
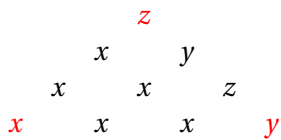


FIGURE 3 – Base de  $10 = 3^2 + 1$

Maintenant, si nous avons une base  $> 3$  qui n'a pas une valeur de  $3^n+1$  alors nous pouvons quand même diviser notre base en partie de  $3^n+1$ . ...



#### 4 Conclusion

Voici donc les résultats de l'atelier Maths en jeans. Merci pour votre attention.