Problème Descartes-Euler

Myriam et Willow, classe de 1^{re}

Année 2022-2023

Établissement(s) : Lycée de l'Harteloire, Brest
Enseignant·e()s : M. Gourmelon
Chercheur·Chercheuse(s) : M. Regbaoui, Université de Bretagne Occidentale

1 Présentation du sujet

Prenez un polyèdre convexe, comptez le nombre de ses arêtes et notez le A, comptez le nombre de ses faces et notez le F, puis comptez le nombre des sommets et notez le S. Que vaut la quantité $F+S-A$?

2 Résultats

Nous avons considéré les cinq solides platoniciens qui sont des polyèdres convexes en notant pour chacun d'eux F son nombre de faces, S son nombre de sommets et A son nombre d'arêtes : en appliquant la formule $S_1 = F+S-A$, on retrouve toujours 2.

La formule s'applique pour tous les polyèdres convexes, la conjecture est vérifiée. Nous avons travaillé avec un graphe planaire des solides : Le graphe planaire est un outil mathématique qui consiste à representer une figure 3D sur un plan.

3 Texte de l'article

3.1 Application de la formule :

Cube : Nombre S de sommets = 8, nombre F de faces = 6, nombre A d'arêtes = 12.

$S_1 = F+S-A = 6+8-12 = 2$.

Puis nous avons essayé de trouver si cette égalité reste vraie si on coupe des coins de ces solides. Par exemple pour le cube, en coupant un coin :

$$F \text{ devient } F+1 \tag{1}$$
$$S \text{ devient } = S+(3-1) \tag{2}$$
$$F \text{ devient } = A+3 \tag{3}$$

Et en coupant x coins (x pouvant être entre 1 et 8) :

$$F \text{ devient } F + x \tag{4}$$
$$S \text{ devient } = S + x(3-1) \tag{5}$$
$$S \text{ devient } = A + 3x \tag{6}$$

Par conséquence

$$(F+x)+(S+x(3-1)-(A+3x) = F+S-A+x+2x-3x \tag{7}$$
$$= 2 \tag{8}$$

et l'égalité reste vraie.

Au final, pour tous les polyèdres convexes, si $S_1 = 2$, peu importe la manière dont on coupe le solide, S_1 restera inchangé

3.2 Utilisation de graphes planaires

On conjecture que, pour un solide pour lequel le résultat de la formule précédente est 2, si on lui retire le plus de sommets ou d'arêtes possible, le résultat de la formule précédente appliquée à nouveau restera toujours 2.

Si la formule s'applique pour tous les polyèdres convexes, la conjecture est vérifiée. Nous avons aussi travaillé avec un graphe planaire des solides, qui nous a été présenté par M. Regbaoui : Le graphe planaire est un outil mathématique qui consiste à représenter une figure 3D sur un plan.

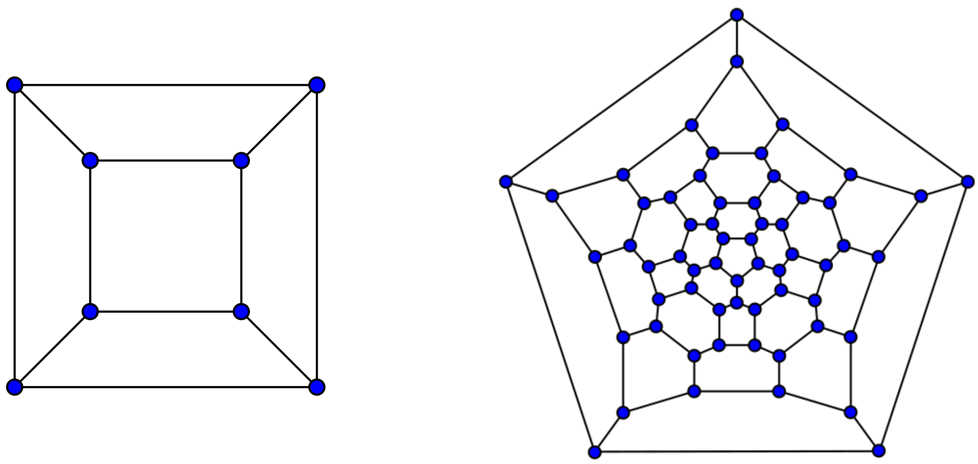

FIGURE 1 – Graphes planaire du cube et de l'icosaèdre tronqué (ballon de football)

Il s'agissait de faciliter notre travail de vérification de la conjecture a l'aide du graphe planaire, notamment avec des solides plus complexes tels qu'un ballon de foot. On a utilisé le graphe planaire du cube pour travailler le graphe planaire de l'icosaèdre tronqué (ballon de foot) et on a raisonné de la même manière : à force de retirer des arêtes extérieures on supprime autant de faces extérieures donc la somme S_1 reste inchangée, puis en continuant

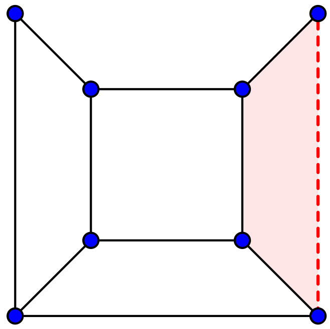

FIGURE 2 – Suppression d'une arête et une face

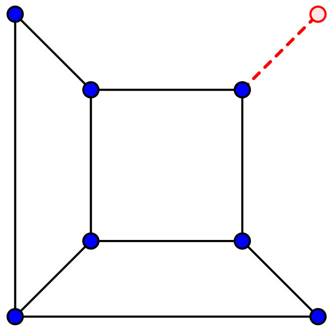

FIGURE 3 – Suppression d'une arête et un sommet

d'enlever les nouvelles arêtes extérieures , on supprime les sommets donc la somme S_1 reste la même et ainsi de suite jusqu'à n'avoir qu'une arête, une face et deux sommets.

Ainsi la somme S_1 est toujours égale a 2. Nous avons ainsi observé que lorsque l'on ne laisse plus qu'une arête ou même seulement un sommet, la formule s'appliquait tout de même.

4 Conclusion