Faites des routes, pas la guerre

Année 2021 – 2022

Eliot Hugot, Diego Chérel-Chicot, Léa Konieczny, (classe de Terminale).

Encadrés par Caroline Rougerie et Marie-Agnès Binois

Établissement : Lycée Général et Technologique Maurice Genevoix, Ingré

Chercheur : Philippe Grillot, Institut Denis Poisson, Orléans

Introduction et présentation :

Sur une carte, il y a deux châteaux et un certain nombre de villes. Tour à tour, deux joueurs s'affrontent en reliant par une route deux lieux. Cette route doit être liée directement ou indirectement à un des deux châteaux (1). La partie s'arrête lorsqu'un des joueurs crée une route qui permet d'aller d'un château à un autre.
Ce joueur aura alors perdu.

Nous nous demanderons donc quelle est la meilleure stratégie à adopter pour gagner à tous les coups, selon le nombre de lieux ; en considérant qu'aucun joueur ne perde délibérément (2).

1. Résultats observés et conjectures

Après un grand nombre de parties, voici ce que nous avons observé.

Lorsque nous jouons avec un nombre de lieux qui peut s'écrire sous la forme $4k+1, k$ étant un entier positif (1, 5, 9, 13, 17, etc.), nous remarquons que le joueur n°2 gagne à chaque fois. De le même manière, lorsque nous jouons avec un nombre de lieux qui peut s'écrire sous la forme $4k+3,\ k$ étant un entier positif (3, 7, 11, etc.), nous remarquons que le joueur n°1 gagne à chaque fois.

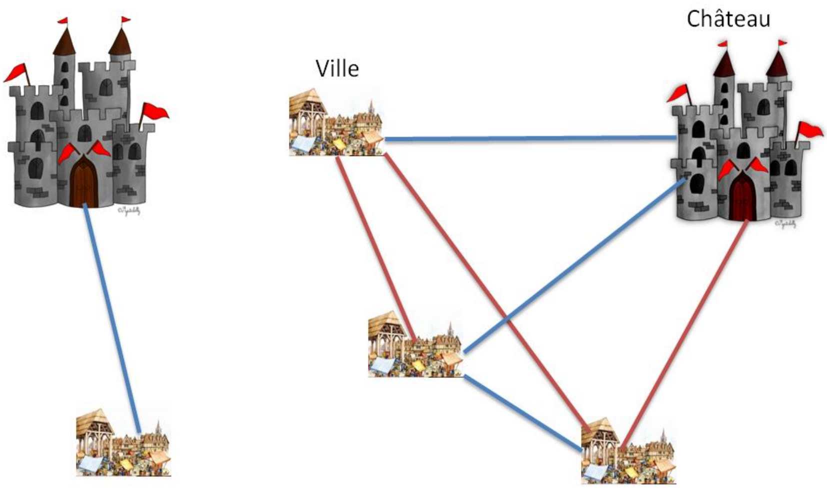
Nous avons également observé que lorsque le nombre de lieux est un nombre pair, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire sous la forme $2k, k$ étant un entier positif, on peut ainsi en déduire que le joueur 2 gagne à chaque fois lorsqu'il joue en symétrie par rapport au joueur n°1.

2. Notre article

Comme nous jouons à tour de rôle, lorsque le nombre de routes final avant la route fatidique est pair, le joueur 2 gagne. Inversement, lorsque le nombre de routes final avant la route fatidique est impair, le joueur 1 gagne.

A) Les Royaumes

Nous avons étudié plusieurs situations en les écrivant sous formes de graphes.
Grâce à cela nous avons pu voir qu'à l'instant de jouer la route fatidique, les lieux sont regroupés dans 2 royaumes chacun « articulé » (dont les villes, le château, sont reliés) (3).
Afin d'étudier le nombre de routes maximum dans le continent (en tout), nous allons étudier le nombre de routes maximum dans chaque royaume.



d	u(d)
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45
...	...

Joueur n°1 : - - - - - - - - - - Joueur n°2 : - - - - - - - - - - d : nombre de lieux dans un royaume
$U(d)$: nombre de routes dans un royaume

Le nombre de routes maximum dans un royaume est représentée par la suite : $U\ (d+1) \ = \ u(d) + d.$

En effet, lorsque l'on rajoute une ville, on rajoute autant de routes qu'il y avait de lieux avant.

$U(d)$ est donc la somme d'entiers consécutifs partant de 0. On a donc : $\boxed{U(d) \ = \ \frac{d(d-1)}{2}}$

On sait prouver grâce à cette formule (en remplaçant d par $4k$; $4k+1$; etc.) que :

$U(4k)$ est pair ; $U(4k+1)$ est pair ; $U(4k+2)$ est impair ; $U(4k+3)$ est impair.

B) La Stratégie miroir

c : total des lieux dans le continent (2 châteaux + les villes),
R : nombre de routes sur le continent avant la route fatidique.

Si $\boldsymbol{c} = 2k$, c'est-à-dire si **le nombre de lieux** est pair, et si le deuxième joueur joue de façon symétrique au premier (4),

- ➔ Les deux royaumes sont identiques.
- ➔ $U(d_1) \ = \ U(d_2) \ = \ U(d)$
- ➔ $R(c) \ = \ U(d_1) \ + \ U(d_2) \ = \ 2\,x\,U(d)$

Comme on peut partager R en 2 parties égales, R est un nombre pair, donc le joueur n°2 gagne.

La stratégie miroir est donc applicable lorsque $\boldsymbol{c} = \ 2k$, c'est-à-dire lorsque **le nombre de lieux,** en tout, est pair. Cette stratégie permet au joueur n°2 de gagner à tous les coups s'il l'applique. Lorsque **le nombre de lieux** n'est pas pair, les deux royaumes ne peuvent pas être identiques donc cette stratégie n'est pas utilisable.

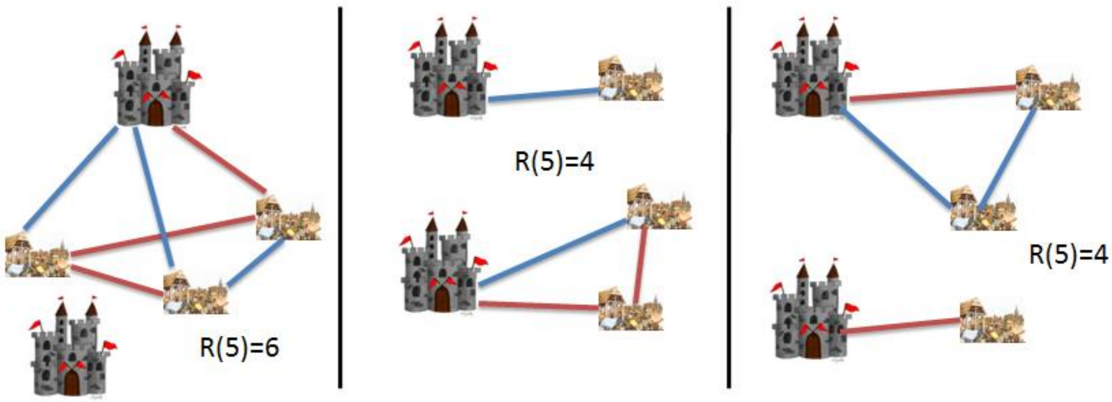
C) Autres Cas

Nous allons donc procéder à l'étude de cas lorsque **le nombre de lieux** est impair.
Nous avons décidé de compter le nombre de routes maximum qui peuvent être créées en fonction du **nombre de lieux** et des différentes configurations possibles.

Nous avons calculé R grâce à la formule suivante, où x désigne un entier (5), allant de 1 à la partie entière de $(c/2)$.

$$\boldsymbol{R(c) \;=\; \underbrace{U(c-x)}_{\text{Nombre de routes dans le premier royaume}} \;+\; \underbrace{U(x)}_{\text{Nombre de routes dans le deuxième royaume}}}$$

En effet, dans un royaume il y a au minimum une ville et lorsque que x dépasse la moitié du nombre de lieu nous tombons sur une situation déjà trouvée.



Exemple des différentes configurations pour $c = 5$
La dernière montre que les 2 royaumes peuvent être échangés cela n'influe pas sur les calculs.

nombre de lieux dans le continent (c)	nombre de routes maximum dans le continent (R)
1	impossible
2	{0}
3	{1}
4	{2;3}
5	{4;6}
6	{6;7;10}
7	{9;11;15}
8	{12;13;16;21}
9	{16;18;22;28}
10	{18;20;21;29;36}
11	{25;27;31;37;45}
12	{30;31;34;39;46;55}
13	{36;38;42;48;56;66}

Tableau qui répertorie le nombre de routes en fonction des différentes configurations selon **le nombre de lieux.**

Nous observons dans le tableau les mêmes phénomènes qu'au début.
C'est-à dire que le joueur n°2 gagne à chaque fois que nous jouons avec un **nombre de lieux** qui peut s'écrire sous la forme $4k + 1, k$ étant un entier positif, car dans le tableau cet évènement se répète toutes les 4 lignes et commence à la ligne 1.

De la même manière, le joueur n°1 gagne à chaque fois que nous jouons avec un **le nombre de lieux** qui peut s'écrire sous la forme $4k + 3, k$ étant un entier positif, car dans le tableau cette évènement se répète toutes les 4 lignes et commence à la ligne 3.

Nous avons donc opéré par disjonction de cas, en testant pour deux valeurs de $c, 4k + 1$ et $4k + 3$ et pour toutes les valeurs de x possibles, c'est-à-dire $4k' + 1, 4k' + 2, 4k' + 3, 4k'$.

C = 4k+1

R(c) = U(c-x) + U(x) x=4k'+1
R(4k+1) = U(4k+1-(4k'+1)) + U(4k'+1)
U(4k+1-4k'-1) + U(4k'+1)
U(4(k-k')) + U(4k'+1)
pair + pair = pair

R(c) = U(c-x) + U(x) x=4k'+2
R(4k+1) = U(4k+2-(4k'+2)) + U(4k'+2)
U(4k+1-4k'-2) + U(4k'+2)
U(4(k-k')-1) + U(4k'+2)
U(4(k-k')+3) + U(4k'+2)
impair + impair = pair

R(c) = U(c-x) + U(x) x=4k'+3
R(4k+1) = U(4k+1-(4k'+3)) + U(4k'+3)
U(4k+1-4k'-3) + U(4k'+3)
U(4(k-k')-2) + U(4k'+3)
U(4(k-k')+2) + U(4k'+3)
impair + impair = pair

R(c) = U(c-x) + U(x) x=4k'
R(4k+1) = U(4k+1-(4k')) + U(4k')
U(4k+1-4k') + U(4k')
U(4(k-k')+1) + U(4k')
pair + pair = pair

Conclusion : R(4k+1) est pair pour tout k ϵ ℕ

C = 4k+3 4 valeurs de x = 4k'+1
4k'+2
4k'+3
4k'

R(c) = U(c-x) + U(x) x=4k'+1
R(4k+1) = U(4k+3-(4k'+1)) + U(4k'+1)
U(4k+3-4k'-1) + U(4k'+1)
U(4(k-k')+2) + U(4k'+1)
impair + pair = impair

R(c) = U(c-x) + U(x) x=4k'+2
R(4k+1) = U(4k+3-(4k'+2)) + U(4k'+2)
U(4k+3-4k'-2) + U(4k'+2)
U(4(k-k')+1) + U(4k'+2)
pair + impair = impair

R(c) = U(c-x) + U(x) x=4k'+3
R(4k+1) = U(4k+3-(4k'+3)) + U(4k'+3)
U(4k+3-4k'-3) + U(4k'+3)
U(4(k-k')) + U(4k'+3)
pair + impair = impair

R(c) = U(c-x) + U(x) x=4k'
R(4k+1) = U(4k+3-(4k')) + U(4k')
U(4k+3-4k') + U(4k')
U(4(k-k')+3) + U(4k')
impair + pair = impair

Conclusion : R(4k+3) est impair pour tout k ϵ ℕ

Nous avons donc démontré mathématiquement nos observations.

3. Conclusion

Dans ce jeu, il n'existe pas de stratégie gagnante universelle, il existe seulement une stratégie lorsque **le nombre de lieux** est pair.
Dans le cas contraire, lorsqu'il est impair, suivant que le nombre peut s'écrire sous la forme $4k + 1$ ou sous la forme $4k + 3$, on peut savoir à l'avance qui va gagner indépendamment de nos actions (6).
Ainsi, en sachant à l'avance **le nombre de lieux** et en choisissant qui commence, on peut faire en sorte de gagner à chaque partie.

Notes d'édition

(1) Et aussi on ne peut créer qu'une seule route entre deux lieux donnés.

(2) Plus précisément, on suppose dans tout l'article que, tant qu'il a une autre possibilité, un joueur ne crée pas de route qui permet d'aller d'un château à un autre (la route "fatidique").

(3) À ce moment, toutes les villes sont reliées à un château, constituant deux "royaumes" non reliés entre eux, et dans chaque royaume toutes les routes entre deux lieux ont été créées, de sorte que le joueur suivant n'a pas d'autre possibilité que de créer la route fatidique.
Alors, dans chaque royaume le nombre de routes est donc le maximum possible.

(4) Il faut préciser en quoi consiste ce jeu par symétrie car n'y a pas au départ de symétrie à part celle des deux châteaux. Comme toutes les routes doivent être liées à un des deux châteaux, les royaumes se constituent progressivement à partir des deux châteaux ; le joueur n°2 aura établi à tout moment une symétrie entre les deux royaumes en construction, sans que les villes isolées aient encore une symétrique ; lorsque le joueur n°1 crée une route à l'intérieur d'un royaume, le joueur n°2 crée simplement la route symétrique ; et chaque fois que le n°1 ajoute une ville à l'un des royaumes, le n°2 en ajoute une autre à l'autre royaume (il en existe toujours au moins une, car le nombre de villes est pair), et on déclare ces villes symétriques ; le n°2 choisit aussi pour l'autre extrémité de la route qu'il crée le lieu symétrique de celle de la route que le n°1 vient de créer.

(5) Cet entier x désigne le nombre de lieux dans le plus petit des deux royaumes.

(6) Dans ce cas, on peut tout de même dire que l'un des joueurs a une stratégie gagnante, même si cette "stratégie" consiste seulement à ne jamais jouer un coup immédiatement perdant.