MeJ 2022 2023

Groupe MeJ Paris-Saclay : Florian Da-Silva, Aurélien Perdriaud

Novembre 2022 - Mars 2023 (- Août 2023)

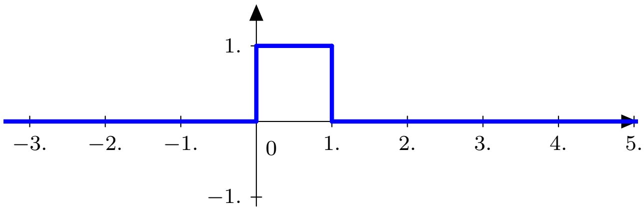
Table des matières

1 Introduction

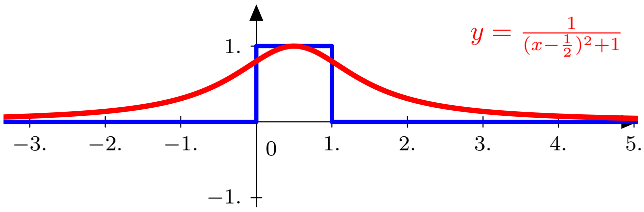
Ce document a été rédigé dans le cadre de l'atelier MATh.en.JEANS de la Faculté des Sciences d'Orsay, pour le sujet "Conduite en Douceur". Il provient du travail de Florian Da Silva, Aurélien Perdriaud, mais aussi de Pierre Pansu, Lucas Hermier–Gastineau, pour certaines idées importantes (résolution du problème initial pour Lucas, sujet et idée d'une preuve quantitative pour Pierre), avec aussi des remarques d'autres participants à MeJ moins actifs sur le sujet. Il est aussi parfois inspiré de résultats déjà connus mais le travail étant amateur le but n'est pas de trouver des résultats nouveaux mais simplement de s'initier à une activité de recherche, la recherche bibliographique est donc exclue bien qu'on ait parfois exploré d'autres sources.

1.1 Problème : Conduite en douceur

Ma voiture n'aime pas les coups d'accélérateur ou les coups de freins trop brusques. Je ne dois pas lui imposer un profil de vitesse qui a la forme d'un créneau :



Le tracé rouge, c'est mieux. C'est le graphe d'une fraction rationnelle. Peut-on trouver d'autres fractions rationnelles qui approximent encore mieux le créneau ?



1.2 Questions

- Quelle serait une telle fonction ?
- Que signifie approximer une fonction par d'autres ?
- Comment mesurer une approximation ?
- Quels sous-ensembles de fractions rationnelles peuvent approximer le créneau ? (Voir pour degré borné.)
- Que se passe-t-il si on s'autorise à prendre les primitives des fractions rationnelles ?
- On veut que la conduite soit en douceur, si on borne la dérivée des fractions rationnelles, quel impact cela a-t-il sur l'approximation de la fonction ?

2 Généralités

2.1 Prérequis

2.1.1 Continuité

Définition 1 (Continuité)**.** *Une fonction $f : D \to \mathbb{K}$ est continue en $a \in \mathrm{Acc}(D) \cap D$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a-\delta, a+\delta[, f(x) \in]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$.*

Elle est continue sur E si elle est continue en tout $a \in E$.

Définition 2 (Continuité uniforme)**.** *Une fonction est uniformément continue sur E si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon$*

Le théorème suivant donne des conditions faibles qui garantissent que des fonctions continues sont en réalité uniformément continues, ce qui est très pratique.

Théorème 1 (Théorème de Heine)**.** *Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue. Autrement dit par négation logique :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta \wedge |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon.$$

Soit alors un ε respectant cette propriété. On considère la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n, \delta_n = \frac{1}{n}$, et on a bien $\forall n, \delta_n > 0$ (et $\delta_n \leq 1$). Alors par définition de ε, pour chaque n, il existe $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ tels que $|x_n - y_n| < \delta_n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Tout d'abord par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} |x_n - y_n| = 0$.

Si (x_n) est non-bornée, alors il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de (x_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} x_{\phi(n)} = \pm\infty$, sans perte de généralité disons $+\infty$. On a aussi $x_{\phi(n)} - 1 \leq x_{\phi(n)} - \delta_{\phi(n)} < y_{\phi(n)}$ au vu de la condition $|x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}| < \delta_{\phi(n)}$, donc on a par les gendarmes $\lim_{n\to+\infty} y_{\phi(n)} = +\infty$. Au vu de la limite en $+\infty$ de f on a donc $0 = |0-0| = \lim_{n\to+\infty} |f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})| \geq \lim_{n\to+\infty} \varepsilon = \varepsilon > 0$, contradiction !
Si (x_n) est borné, par le théorème de Bolzano-Weierstrass 4 (voir dans l'article), il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\to\mathbb{N}}$ de (x_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} x_{\phi(n)} = l$ pour un certain $l \in \mathbb{R}$. Vu que $\lim_{n\to+\infty} |x_n - y_n| = 0$, on a en particulier $\lim_{n\to+\infty} \left(x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}\right) = 0$ et donc on a en fait $\lim_{n\to+\infty} y_{\phi(n)} = l$. On a alors par continuité ($x \to |x|$ est une fonction continue) $0 = |f(l) - f(l)| = \lim_{n\to+\infty} |f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})| \geq \lim_{n\to+\infty} \varepsilon = \varepsilon > 0$, contradiction ! □

Corollaire 1. *Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur un intervalle fermé, alors elle est uniformément continue.*

Démonstration. Si l'intervalle est $[a,b]$, il est aisé de prolonger $f : [a,b] \in \mathbb{R}$ en une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (i.e on doit avoir $\forall x \in [a,b], f(x) = g(x)$, $\lim_{x\to a^-} g(x) = f(a)$, $\lim_{x\to b^+} = f(b)$) telle que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Il suffit juste de lui accoller des fonctions du type $\frac{\alpha}{x-\beta}$ bien définies sur leurs intervalles et prenant les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ au bon endroit.
On a alors g uniformément continue par le lemme ci-dessus, et alors $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon$. En particulier si on a $\varepsilon > 0$ et $x, y \in [a,b]$, vu que x, y sont aussi dans $\mathbb{R}$ par inclusion, on a $|x-y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon$, et vu que pour $x, y \in [a,b]$ on a $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$ on a plus précisément $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Cela montre que f est bien uniformément continue. □

2.1.2 Convergence de fonctions

La convergence de fonctions peut être vue selon deux modes.

Définition 3 (Convergence simple)**.** *On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vont de D dans $\mathbb{K}$ converge simplement vers une fonction $f : D \to \mathbb{K}$ quand $\forall x \in D, \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ou autrement dit quand $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Définition 4 (Convergence uniforme)**.** *On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vont de D dans $\mathbb{K}$ converge uniformément vers une fonction $f : D \to \mathbb{K}$ quand $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$*

La convergence uniforme est différente de la convergence simple. La convergence simple consiste à dire qu'une suite de fonctions "tend" vers une autre fonction si ça tend en *chaque* point de la fonction. Tandis que la convergence uniforme demande que ça converge partout "à la même vitesse". Par exemple, la suite de fonctions $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ converge simplement vers la fonction $x \to 0$, car $\lim_{n\to\infty} e^{-(x-n)^2} = 0$ mais elle ne converge pas vuniformément vers $x \to 0$ car $f_n(n) = e^{-(n-n)^2} = 1$, vu qu'il y aura toujours sensiblement au dessus de 0.

2.1.3 Intégrabilité

Une subdivision s d'un intervalle $[a,b]$ est une suite $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ telle que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, son pas p est définie comme $\max x_k - x_{k-1} : 1 \leq k \leq n$, c'est à dire la distance maximale entre deux éléments consécutifs de la suite. En prenant la suite (appelée "marquage") m de n nombres $(t_1, t_2, ..., t_n)$ avec t_i compris entre x_k et x_{k+1} à partir d'une subdivision, on peut considérer la quantité

$$A_{s,t} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(t_i)$$

On dit que f est intégrable sur $[a,b]$ si toute suite (s_n) de subdvisions dont le pas tend vers 0 (et toute suite de marquage (m_n)), fait tendre A_{s_n,m_n} vers une même limite finie. La limite en question est définie comme l'intégrale de f, et est notée

$$\int_a^b f(t)dt$$

.

De façon plus intuitive, si on trace la courbe d'une fonction positive f sur un plan, et qu'on regarde la courbe sur un intervalle $[a,b]$, l'aire comprise entre le segment $[a,b]$ de l'axe des abscisses et la courbe au dessus va être l'intégrale de f sur $[a,b]$. La définition ci-dessus revient à dire que la fonction peut être approximée par des juxtapositions de rectangle, et prendre l'aire de ces rectangles donne une approximation de l'aire en question : et qu'en plus, n'importe quelle approximation possible va tendre vers le même résultat !

C'est une définition assez restrictive de l'intégrale mais elle est suffisante pour une grande partie des fonctions avec lesquelles on travaille. (Par exemple, les fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ sont intégrables sur $[a, b]$.)

On définit aussi l'intégrale sur des bornes infinies de la façon suivante :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

(Il se peut que la limite n'existe pas et donc que l'intégrale ne soit pas définie sur cette borne.) On a une définition similaire pour $\int_{-\infty}^a$ et on peut écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty}$ au vu de la propriété de Chasles ci-dessous.

La notion d'aire a de très bonnes propriétés qui nous permettent d'obtenir les propriétés suivantes pour l'intégrale, appellées Chasles (les aires se somment) et Croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

$$\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x) \implies \int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$$

Le théorème fondamental de l'analyse lie aussi les intégrales avec la notion de dérivée. En fait, si f est différentiable et si sa dérivée est intégrable, on va avoir $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$, ce qui montre en faisant varier b que l'intégrale est une forme de primitive. L'application de ce théorème permet de créer des outils qui aident grandement au calcul de l'intégral sans avoir à se ramener à sa définition. Mais on utilise assez peu ces propriétés dans cet article, sauf à partir de la section 5.

2.1.4 Limite sup et lim inf

Le supremum (noté sup) d'un ensemble A inclus dans $\mathbb{R}$ est le plus petit réel qui est plus grand que tous les éléments de A. Symétriquement l'infimum (noté inf) d'un ensemble est le plus grand réel qui est plus petit que tous les éléments de A.

Soit un ensemble $E \subset \mathbb{R}$. On note $D = \mathrm{Acc}(E)$ (l'ensemble des réels qui se laissent approcher par des éléments de E), et soit une fonction $f : E \to \mathbb{R}$, on définit alors pour un réel $a \in D$:

- $\limsup\limits_{x \to a} f(x) := \inf\{\sup\{f(x) : x \in]a - \delta; a + \delta[\cap D \setminus \{a\}\} : \delta \in \mathbb{R}\}$
- $\liminf\limits_{x \to a} f(x) := \sup\{\inf\{f(x) : x \in]a - \delta; a + \delta[\cap D \setminus \{a\}\} : \delta \in \mathbb{R}\}$
- $\limsup\limits_{x \to a^-} f(x) := \inf\{\sup\{f(x) : x \in]a - \delta; a[\cap D\} : \delta \in \mathbb{R}\}$
- $\liminf\limits_{x \to a^-} f(x) := \sup\{\inf\{f(x) : x \in]a - \delta; a[\cap D\} : \delta \in \mathbb{R}\}$
- $\limsup\limits_{x \to a^+} f(x) := \inf\{\sup\{f(x) : x \in]a; a + \delta[\cap D\} : \delta \in \mathbb{R}\}$
- $\liminf\limits_{x \to a^+} f(x) := \sup\{\inf\{f(x) : x \in]a; a + \delta[\cap D\} : \delta \in \mathbb{R}\}$

On remarque par ailleurs qu'on peut se contenter de définir les quatre dernières avec a point d'accumulation exclusivement à gauche ou exclusivement à droite de E. On utilisera d'ailleurs les notations $\overline{\lim} := \limsup$ et $\underline{\lim} := \liminf$. Intuitivement la limite sup est la limite des plus grandes valeurs de la fonction autour de a, et la limite inf est la limite des plus petites valeurs de la fonction autour de a.

Les limites supérieures et inférieures existent toujours en vertu de l'axiome de complétude. On donne quelques propriétés essentielles des limites supérieures et inférieures qu'on ne démontrera pas, mais qui peuvent être trouvées dans (insérer un document) :

- $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$ sont des valeurs d'adhérence de l'ensemble considéré, c'est à dire que pour tout $a \in D$ il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k, x_k \in E$ et $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \overline{\lim}_{x \to a} f(x)$. Idem pour la limite sup à gauche, à droite, et pour la limite inférieure (aussi à gauche et à droite).
- $\overline{\lim}_{x \to a} f(x) = \underline{\lim}_{x \to a} g(x) = l \implies \lim_{x \to a} f(x) = l$
- $\overline{\lim}_{x \to a} f(x) + \overline{\lim}_{x \to a} g(x) \geq \overline{\lim}_{x \to a} f(x) + g(x)$

- $\underline{\lim}_{x\to a} f(x) + \underline{\lim}_{x\to a} g(x) \leq \underline{\lim}_{x\to a} f(x) + g(x)$
- $\overline{\lim}_{x\to a} f(x) = -\underline{\lim}_{x\to a} -f(x)$
- $\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = -\overline{\lim}_{x\to a} -f(x)$
- $\underline{\lim}_{x\to a} f(x) \leq \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$

2.1.5 Erreurs

Les erreurs sont liées aux approximations : on cherche à s'approcher de valeurs dites "réelles" c'est à dire qui "existent vraiment", mais on obtient des valeurs qui ne sont pas exactement les mêmes, on parle de valeurs approchées. On a alors différents moyens de quantifier cette erreur.
Erreur absolue :

$$|V_{\text{approchée}} - V_{\text{réelle}}|$$

Erreur quadratique :

$$(V_{\text{approchée}} - V_{\text{réelle}})^2$$

Erreur relative :

$$|1 - \frac{V_{\text{approchée}}}{V_{\text{réelle}}}|$$

Les deux premières permettent une mesure "additive" de l'erreur, bien que la deuxième accorde plus d'importance aux grosses erreurs, et est utilisée par exemple en statistiques. La dernière quant à elle tend à mesurer un écart "multiplicatif", et est utile pour étudier par exemple des comparaisons asymptotiques lorsque les valeurs dépendent d'une grandeur qui varie.

2.1.6 Classes de fonctions particulières

On a déjà vu les fonctions continues et uniformément continues. D'autres classes de fonctions seront utilisées dans l'article, telles que les fonctions en escalier (dont la fonction créneau est un cas particulier), et les fractions rationnelles (on pensait aussi à utiliser les fonctions affines par morceau pour une autre partie de la recherche mais ça ne s'est pas fait). On va décrire juste ici les fonctions escaliers, et la définition d'une fraction rationnelle sont vus dans la section 4.

Définition 5 (Fonction en escalier). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction escalier est une fonction $c : I \to \mathbb{R}$, souvent notée c ou g. L'ensemble des fonctions escaliers est noté $\mathcal{E}$.*
S'il est de la forme $[a, b]$, une fonction escalier va être un ensemble de n points x_i avec $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, telle que pour chaque $i \in [\![1, n-1]\!]$ il existe un réel a_i tel que $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[, f(x) = a_i$. Les valeurs de $f(x_i)$ sont quant à elles "libres", mais on aura souvent $\forall i f(x_i) = a_i$ ou $\forall i, f(x_i) = a_{i-1}$ selon les constructions, et la définition est donc en fait toujours valide si on a un des deux crochets qui est fermé dans $]x_i, x_{i+1}[$ dans la définition. Aussi, il est plus généralement courant de prendre des valeurs telles que $\forall i, a_i < f(x_i) < a_{i+1}$, parfois même $f(x_i)$ étant la moyenne des deux valeurs.

Définition 6 (Pas et saut d'une fonction escalier). *Le pas d'une fonction escalier est défini comme* $\sup\{|x_{i+1} - x_i| : i \in A\}$ *où A est l'ensemble des indices où la suite (x_i) est définie (et où chaque x_i est défini). Quant à lui le saut est défini comme* $\sup\{|a_{i+1} - a_i| : i \in A\}$.

Définition 7 (Fonction créneau). *La fonction créneau est une fonction escalier 5 particulière, définie avec $x_0 = 0, x_1 = 2$, $a_{-1} = 0, a_0 = 1, a_1 = 0$, $f(x_0) = \frac{1}{2}$ et $f(x_1) = \frac{1}{2}$. Elle est généralement notée e mais il est possible qu'on la note c (c'est en général précisé dans l'article). En fait on a :*

$$e(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{2} & si\ x = 0 \\ 1 & si\ 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & si\ x = 1 \\ 0 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Son pas est de 1, *son saut est de* 1.

On pourra aussi parler de "fonction créneau" dans un sens plus large, où la fonction est obtenue par translation, agrandissement ou réduction d'axe x ou y. On peut écrire

Formule 1. *Si $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur un intervalle borné, alors on a une fonction c' s'écrivant comme combinaison linéaire de translatées et dilatées de la fonction e, telle que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i : i \in A\}, c(x) = c'(x)$. Si on note A' l'ensemble des indices de la suite (a_i) de la fonction escalier c, on obtient ainsi :*

$$c'(x) = \sum_{i \in A'} a_i e\left(\frac{x - x_i}{|x_{i+1} - x_i|}\right).$$

On ne va pas détailler sensiblement la preuve ici, mais il est aisé de voir que pour chaque i, si $x_i < x < x_{i+1}$ alors pour tout $k \neq i$, $e(\frac{x-x_K}{|x_{K+1}-x_K|} = 0$ mais $e\left(\frac{x-x_i}{|x_{i+1}-x_i|}\right) = 1$ ce qui donne bien que les deux correspondent. Inversement il est clair que chaque somme discrète de fonctions créneaux de la forme citée dans la formule 1 (càd qu'on "colle") va bien former une fonction escalier. Et ce même si le nombre de termes est infini.

Si ici une formule sensée approximer des fonctions continues à partir de fonctions escaliers qui va nous être utile dans les autres sections.

Formule 2 (Approximation canonique d'une fonction réelle continue)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On approxime une fonction par des fonctions escaliers de pas constant, avec la valeur de pas de plus en plus petite à mesure qu'on améliore l'approximation.*

Si I est fermé borné :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\forall x \in [a, b], f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b - a))e(\frac{x}{b - a})$$

L'approximation est la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Si I est un intervalle borné :
Même principe que ci-dessus juste on remplace les crochets fermants par des crochets ouverts ou fermants.

Si $I = \mathbb{R}$: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{n}\right) e\left(\frac{x - k}{n}\right)$$

L'approximation est la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2.2 Les approximations de fonctions

Le sujet porte sur l'approximation de fonctions. On va d'abord définir ce que l'on appelle "indice d'approximation", puis on définira grâce à cette nouvelle notion ce que l'on appelle "fonction approximable", on va en particulier voir que la notion n'est pertinente que si on cherche à les approximer avec certaines classes spécifiques de fonction.

2.2.1 Définition/noms des indices d'approximation et des fonctions approximables

Un indice d'approximation est un moyen de quantifier la précision d'une approximation de fonction. On notera en général λ la fonction en question, et η une de ses approximations, et on se place dans un ensemble E inclus dans les domaines de définition de λ et η. Dans tout le présent document E sera toujours une réunion d'intervalles disjoints, et même souvent $E = \mathbb{R}$.

Définition 8 (Indice d'Erreur Absolue (IEA))**.**

$$\text{IEA}(\lambda, \eta) = \int_E |\lambda(t) - \eta(t)| dt$$

On pourra lier cet indice à la norme $||f||$.

Définition 9 (Indice d'Erreur Maximale (IEM))**.**

$$\text{IEM}(\lambda, \eta) = \sup\{|\lambda(t) - \eta(t)| : t \in E\}$$

On pourra lier cet indice à la norme $||f||_\infty$.

Définition 10 (Indice d'Erreur Relative (IER))**.** *Si $\forall t \in E, \lambda(t) \neq 0$ (en réalité on a besoin de conditions plus fortes pour avoir l'intégrabilité) :*

$$\mathrm{IER}(\lambda, \eta) = \int_E |1 - \frac{\eta(t)}{\lambda(t)}| dt$$

Définition 11 (Indice d'Erreur Quadratique (IEQ))**.**

$$\mathrm{IEQ}(\lambda, \eta) = \int_E (\lambda(t) - \eta(t))^2 dt$$

On pourra aussi lier ça à la norme $||f||_2$, au carré.

L'adjectif maximal signifie qu'on prend le sup de l'erreur au lieu de l'intégrale, et quadratique qu'on prend le carré de l'erreur au lieu de l'erreur : ils peuvent être cumulés ou utilisés pour d'autres erreurs.

Il est possible de généraliser l'indice d'erreur quadratique.

Formellement, un indice d'approximation est en fait une fonction qui associe à deux fonctions et un ensemble un nombre réel positif.

On essaye maintenant de définir ce que l'on appelle l'approximabilité de fonctions.

Définition 12 (Fonction approximable)**.** *Soit λ une fonction. Soit I un indice d'approximation. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles que $\forall f \in \mathcal{C}$, $E \subset D_f$. On dit qu'une fonction λ est approximable au sens de I par $\mathcal{C}$ sur E, si elle est bien définie sur E et qu'il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur E telle que pour tout n, $I(\lambda, \eta_n)$ est bien définie, et $\lim_{n\to\infty} I(\lambda, \eta_n) = 0$.*

Définition 13 (Fonction partiellement approximable)**.** *Soit λ une fonction. Soit I un indice d'approximation. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles que $\forall f \in \mathcal{C}$, $E \subset D_f$. On dit qu'une fonction λ est approximable au sens de I par $\mathcal{C}$ sur E, si elle est bien définie sur E et qu'il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur E telle que pour tout n, $I(\lambda, \eta_n)$ est bien définie, et $I(\lambda, \lim_{n\to\infty} \eta_n) = 0$.*

La notion de fonction partiellement approximable n'est pas très utilisée dans le présent article mais elle n'en reste pas moins importante. Prenons l'indice d'approximation IEM. Si une fonction λ est approximable au sens de l'IEM, cela revient clairement qu'on peut trouver un suite de fonction (η_n) qui converge uniformément vers λ 4, car il faut que tous les points convergent partout à une certaine vitesse minimale, i.e que le maximum de la différence entre η_n et λ en chaque point puisse être arbitrairement petit. Par contre, si λ est seulement partiellement approximable au sens de l'IEM, alors on doit avoir une suite η_n de limite η (i.e qui converge simplement vers η) telle que $\mathrm{IEM}(\lambda, \eta) = 0$, ce qui revient à dire que $\lambda = \eta$ (ce sont les mêmes en chaque point) : cela correspond à une convergence simple 3, car vu que $\lambda = \eta$ on a bien que (η_n) converge vers λ. De façon un peu plus générale si I est un indice d'approximation et si (η_n) converge simplement vers η, et que $I(\lambda, \eta) = 0$, alors on a une approximation partielle. Mais la réciproque est souvent fausse, par exemple si (η_n) converge vers η partout sauf un nombre fini de points, ceux-ci vont être négligeables dans l'intégrale et on aura bien $\mathrm{IEA}(\lambda, \eta) = 0$ mais on n'aura pas de convergence simple.

On peut aussi sûrement parler de fonctions "uniformément approximables". Pour cela il faut une distance $d : V^2 \to \mathbb{R}^+$ dans l'ensemble d'arrivée de la fonction λ considérée. Et on veut alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in E, d(\lambda(x), \eta_n(x)) < \varepsilon$.

2.2.2 Propriétés des indices d'approximation

On note que les indices d'approximations ne sont pas cohérents entre eux, c'est-à-dire qu'il existe une fonction λ tel que pour tout couple d'indices I_1 et I_2, on peut trouver deux fonctions d'approximation η_1 et η_2 telles que $I_1(\lambda, \eta_1) < I_1(\lambda, \eta_2)$ mais $I_2(\lambda, \eta_1) > I_2(\lambda, \eta_1)$. En outre une fonction η_1 peut être une meilleure approximation que η_2 ou non selon l'indice choisi. Certains indices sont peut-être cohérents sur certaines classes, mais voici des contre-exemples qui montrent que ce n'est absolument pas le cas dans le cas général :

La propriété suivante est importante.

Propriété 1 (Minoration de l'IEM)**.** *Soit λ une fonction et η une fonction* ***continue*** *qui approxime λ.*

(i) si $\overline{\lim_{x\to a^+}} \lambda(x) \geq \underline{\lim_{x\to a^-}} \lambda(x)$ alors :

$$\sup\{|\lambda(x) - \eta(x)| : x \in E\} \geq \frac{1}{2}(\overline{\lim_{x\to a^+}} \lambda(x) - \underline{\lim_{x\to a^-}} \lambda(x))$$

(ii) si $\overline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x) \geq \underline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x)$ *alors :*

$$\sup\{|\lambda(x)-\eta(x)| : x\in E\} \geq \frac{1}{2}(\overline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x) - \underline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x))$$

(iii) si $\lambda(a) \geq \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x)$ *alors :*

$$\sup\{|\lambda(x)-\eta(x)| : x\in E\} \geq \frac{1}{2}(\lambda(a) - \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x))$$

(iv) si $\lambda(a) \geq \underline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x)$ *alors :*

$$\sup\{|\lambda(x)-\eta(x)| : x\in E\} \geq \frac{1}{2}(\lambda(a) - \underline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x))$$

(v) si $\overline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x) \geq \lambda(a)$ *alors :*

$$\sup\{|\lambda(x)-\eta(x)| : x\in E\} \geq \frac{1}{2}(\overline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x) - \lambda(a))$$

(vi) si $\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) \geq \lambda(a)$ *alors :*

$$\sup\{|\lambda(x)-\eta(x)| : x\in E\} \geq \frac{1}{2}(\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \lambda(a))$$

Démonstration. Pour la (i), étudions d'abord le cas $\eta(a) \leq \frac{1}{2}(\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) + \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x))$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui admet pour limite à droite a et telle que $\lambda(x_k)$ admet pour $k\to\infty$ comme limite $\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x)$, et donc il existe k_0 tel que pour tout $k\geq k_0$, $\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \frac{\varepsilon}{2} < \lambda(x_k) < \overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) + \frac{\varepsilon}{2}$. De plus par définition de la continuité il existe δ tel que $\forall x \in]a; a+\delta[$, $\eta(a) - \frac{\varepsilon}{2} < \eta(x) < \eta(a) + \frac{\varepsilon}{2}$, et vu que par définition de la limite il existe k_1 tel que $\forall k \geq k_1, x_k \in]a; a+\delta[$, on a que pour tout $k\geq k_1$, $\eta(a) - \frac{\varepsilon}{2} < \eta(x_k) < \eta(a) + \frac{\varepsilon}{2}$. Et donc en prenant $k_2 = \max(k_0, k_1)$ on a que $\forall k \geq k_2$, $\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \frac{\varepsilon}{2} < \lambda(x_k) < \overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ et $-\eta(a) - \frac{\varepsilon}{2} < -\eta(x_k) < -\eta(a) + \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui donne en additionnant $\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \eta(a) - \varepsilon < \lambda(x_k) - \eta(x_k) < \overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \eta(a) + \varepsilon$.

On trouve grâce à cet encadrement que $\sup\{|\lambda(x)-\eta(x)| : x\in E\} \geq \overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \eta(a)$ car pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k tel que $\sup\{|\lambda(x)-\eta(x)| : x\in E\} \geq \lambda(x_k) - \eta(x_k) \geq \overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \eta(a) - \varepsilon$, et on a donc $\forall \varepsilon > 0, \sup\{|\lambda(x)-\eta(x)| : x\in E\} \geq \overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \eta(a) - \varepsilon \implies \sup\{|\lambda(x)-\eta(x)| : x\in E\} \geq \overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \eta(a)$, et par ailleurs $\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \eta(a) \geq \overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \frac{1}{2}(\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) + \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x)) = \frac{1}{2}(\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x))$, comme voulu.

Maintenant pour le cas $\eta(a) \geq \frac{1}{2}(\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) + \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x))$, on répète le même raisonnement mais en minorant le sup par $\eta(a) - \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x)$ (on remplace $\overline{\lim}$ par $\underline{\lim}$ et on échange sa place avec η), et on a bien $\eta(a) - \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x) \geq \frac{1}{2}(\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x) - \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x))$. Ceci qui conclut la démonstration du (i).

La démonstration de la (iii) est similaire à celle de la (i) : on étudie le cas $\eta(a) \leq \frac{1}{2}(\lambda(a) + \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x))$ et on a directement $\sup\{|\lambda(x)-\eta(x)| : x\in E\} \geq \lambda(a) - \eta(a) \geq \frac{1}{2}(\lambda(a) - \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x))$, tandis que le cas $\eta(a) \geq \frac{1}{2}(\lambda(a) + \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x))$ se traite de la même façon que dans la (i) pour la partie avec $\underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x)$ où on remplace $\overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x)$ par $\lambda(a)$.

La démonstration de la (v) est la même que celle de la (i) : on étudie le cas $\eta(a) \geq \frac{1}{2}(\overline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x) + \lambda(a))$ et on obtient le résultat voulu de façon similaire à la (iii) (en remplaçant $\underline{\lim}$ par $\overline{\lim}$), et pour le cas $\eta \leq \frac{1}{2}(\overline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x) + \lambda(a))$, de façon similaire à la (iii) on fait le parallèle avec la (i) en remplaçant $\underline{\lim}_{x\to a^-}$ de la (i) par $\lambda(a)$.

Les (ii), (iv), (vi) se démontrent de manière analogue aux (respectivement) (i), (iii), (v), en interchangeant les limites à droite avec les limites à gauche.

□

2.2.3 Approximabilité de certaines classes de fonctions

Proposition 1. *Si une fonction λ est uniformément continue sur un intervalle $[a,b]$, elle est approximable au sens de l'IEA par des fonctions en escalier.*

Démonstration. On considère la séquence de fonctions $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $[a,b]$ telles que pour $x \in [a+\frac{k}{n}(b-a); a+\frac{k+1}{n}(b-a)[$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$, on aie $\eta_n(x) = \lambda(a+\frac{k}{n}(b-a))$, et $\eta_n(b) = \lambda(a+\frac{n-1}{n}(b-a))$. Il s'agit bien de fonctions en escalier.

On cherche à démontrer que l'IEA pour λ et η_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Soit $\varepsilon > 0$, vu que λ est uniformément continue il existe $\delta > 0$ tel que $|x-y| \leq \delta \implies |\lambda(x) - \lambda(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$, de plus il existe (par l'axiome d'archimède) n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \frac{1}{n} \leq \frac{\delta}{b-a} \iff \frac{b-a}{n} \leq \delta$ et donc $|x-y| \leq \frac{b-a}{n} \implies |x-y| \leq \delta \implies |\lambda(x) - \lambda(y)| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)}$. Notons que pour un tel n :

$$\begin{aligned}
x \in [a+\frac{k}{n}(b-a); a+\frac{k+1}{n}(b-a)] &\iff a+\frac{k+1}{n}(b-a) \geq x \geq a+\frac{k}{n}(b-a) \\
&\iff \frac{b-a}{n} \geq x - (a+\frac{k}{n}(b-a)) \geq 0 \\
&\implies |x - (a+\frac{k}{n}(b-a))| \leq \frac{b-a}{n} \\
&\implies |\lambda(x) - \lambda(a+\frac{k}{n}(b-a))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}
\end{aligned}$$

Et donc on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\lambda(x) - \eta_n(x)| dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} |\lambda(x) - \eta_n(x)| dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} |\lambda(x) - \lambda(a+\frac{k}{n}(b-a))| dx \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \frac{\varepsilon}{b-a} dx \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \big(a+\frac{k+1}{n}(b-a) - (a-\frac{k}{n}(b-a))\big)\frac{\varepsilon}{b-a} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}(b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

On a bien pour tout $\varepsilon > 0$ qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, l'IEA pour λ et η_n est inférieure à ε. $\square$

Proposition 2. *Si une fonction λ est discontinue en un point a, elle n'est pas approximable au sens de l'IEM par des fonctions continues en ce point a.*

Démonstration. Soit η une fonction continue. Supposons que $\underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x) = \overline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x)$, on trouve que :

$$\overline{\lim_{x\to a^-}} \lambda(x) \geq \underline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x) = \overline{\lim_{x\to a^+}} \lambda(x) \geq \underline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x)$$

- Si $\overline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x) > \underline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x)$, et on note $\varepsilon = \frac{1}{2}(\overline{\lim}_{x\to a^-} \lambda(x) - \underline{\lim}_{x\to a^+} \lambda(x)) > 0$ et on trouve par minoration de l'IEM (ii) (η étant continue) que :

$$\sup\{|\lambda(x) - \eta(x)| : x \in E\} \geq \varepsilon$$

  Ainsi pour tout η continu, l'IEM pour λ et η est toujours minoré par $\varepsilon > 0$, donc pour une suite de fonctions continues $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il n'existe donc pas de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\text{IEM}(\lambda, \eta_n) < \varepsilon$ (vu que au contraire $\text{IEM}(\lambda, \eta_n) > \varepsilon$) : la fonction λ n'est donc ici pas approximable par des fonctions continues.

- Sinon $\overline{\lim_{x\to a^-}} \lambda(x) = \underline{\lim_{x\to a^-}} \lambda(x) = \overline{\lim_{x\to a^+}} \lambda(x) = \underline{\lim_{x\to a^+}} \lambda(x)$, d'où (définition de la limite à partir de celles à gauche et à droite) $\overline{\lim_{x\to a}} \lambda(x) = \underline{\lim_{x\to a}} \lambda(x)$, donc la limite l en a de λ existe et $\overline{\lim_{x\to a}} \lambda(x) = \underline{\lim_{x\to a}} \lambda(x) = l \neq \lambda(a)$ par discontinuité en a, on a donc soit $\overline{\lim_{x\to a}} \lambda(x) > \lambda(a)$ et on conclut avec la (v)/(vi) de la minoration de l'IEM de la même façon que ci-dessus, soit on a $\underline{\lim_{x\to a}} \lambda(x) < \lambda(a)$ et on conclut avec la (iii)/(iv) de l'IEM de la même façon que ci-dessus.

On suppose maintenant que $\underline{\lim_{x\to a^-}} \lambda(x) \neq \overline{\lim_{x\to a^+}} \lambda(x)$, il nous reste alors deux cas :

- si $\underline{\lim_{x\to a^-}} \lambda(x) < \overline{\lim_{x\to a^+}} \lambda(x)$ on conclut de la même façon que ci-dessus par la minoration de l'IEM (i).

- si $\underline{\lim_{x\to a^-}} \lambda(x) > \overline{\lim_{x\to a^+}} \lambda(x)$, alors $\overline{\lim_{x\to a^-}} \lambda(x) \geq \underline{\lim_{x\to a^-}} \lambda(x) > \overline{\lim_{x\to a^+}} \lambda(x) \geq \underline{\lim_{x\to a^+}} \lambda(x)$, on a bien $\overline{\lim_{x\to a^-}} \lambda(x) \geq \underline{\lim_{x\to a^+}} \lambda(x)$ et on conclut de la même façon que ci-dessus par la minoration de l'IEM (ii).

Ce qui conclut.

□

La proposition suivante est importante.

Proposition 3 (Transitivité de l'approximabilité à un certain sens)**.** *Soit un indice d'erreur I tel que pour toutes fonctions α, β, γ, on aie $I(\alpha,\gamma) \leq I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma)$. Soient deux classes C_1 et C_2 de fonctions. Si une fonction λ est approximable par des fonctions de C_1 au sens de I, et que les fonctions de C_1 sont approximables par des fonctions de C_2, au sens de I, alors λ est approximable par des fonctions de C_2 au sens de I.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in C_1^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n\to\infty} I(\lambda,\eta_n) = 0$ et pour chaque η_n il existe $(\zeta_{m,n})_{m\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\lim_{m\to\infty} I(\eta_n,\zeta_{m,n}) = 0$. Par définition de la limite on note que pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi(k,\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $I(\eta_k, \zeta_{\varphi(k,\varepsilon),k}) < \varepsilon$.

On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\zeta_{\varphi(k,k^{-1}),k})_{k\in\mathbb{N}} \in C_2^{\mathbb{N}}$. On a :

$$\begin{aligned}0 < I(\lambda,u_k) &= I(\lambda,\zeta_{\varphi(k,k^{-1}),k}) = \\ &\leq I(\lambda,\eta_k) + I(\eta_k,\zeta_{\varphi(k,k^{-1}),k}) < I(\lambda,\eta_k) + k^{-1}\end{aligned}$$

La limite du membre de droite est nulle, et donc par les gendarmes on a bien $\lim_{k\to\infty} I(\lambda,u_k) = 0$ pour $(u_k)_{k\in\mathbb{N}*} \in C_2^{\mathbb{N}^*}$ ce qui conclut. □

Corollaire 2. *Cette propriété est vraie pour $I =$ IEA.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathrm{IEA}(\alpha,\gamma) &= \int_E |\alpha(t)-\gamma(t)|dt = \int_E |\alpha(t)-\beta(t)+\beta(t)-\gamma(t)|dt \\ &\leq \int_E (|\alpha(t)-\beta(t)| + |\beta(t)-\gamma(t)|)dt = \mathrm{IEA}(\alpha,\beta) + \mathrm{IEA}(\beta,\alpha)\end{aligned}$$

□

Corollaire 3. *L'IEM a cette propriété de transitivité.*

Démonstration.

$$\mathrm{IEM}(\alpha,\gamma) = \sup\{|\alpha-\gamma|\} \leq \sup\{|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|\} \leq \sup\{|\alpha-\beta|\} + \sup\{|\beta-\gamma|\} = \mathrm{IEM}(\alpha,\beta) + \mathrm{IEM}(\beta,\gamma)$$

□

On note aussi que si une fonction est approximable par des fonctions de classe C au sens de l'IEM alors on peut trouver une suite de fonctions de C qui converge uniformément vers notre fonction λ, c'est presque par définition.

3 Premiers exemples

3.1 Solution du problème initial

On considère la suite de fonctions suivante :

Formule 3 (Approximation de la fonction créneau)**.**

$$f_n(x) = \frac{1}{(2x-1)^{2n}+1}.$$

Proposition 4. *La formule 3 fournit une approximation de la fonction créneau au sens de l'IEA.*

Démonstration.

$$\lim_{n\to\infty} (2x-1)^{2n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } |2x-1| > 1 \\ 1 & \text{si } |2x-1| = 1 \\ 0 & \text{si } |2x-1| < 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2x-1)^{2n}+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ce qui résout globalement le problème. □

Remarque 1 (Points égaux)**.** *Avec l'approximation 3, on a, pour tout k*

$$f_k(0) = \frac{1}{1+(2\times 0-1)^{2k}} = \frac{1}{1+(-1)^{2k}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1^{2k}} = \frac{1}{1+(2\times 1-1)^{2k}} = f_k(1)$$

En particulier $f_k(0) = e(0) = f_k(1) = e(1)$.

3.2 Approximabilité de fonctions uniformément continues

On sait que la fonction créneau est approximable par des fractions rationnelles de degré libre. Aussi, vu que la suite (f_n) approxime la fonction créneau, il existe aussi en considérant $\gamma f_n(\alpha x - \beta)$ des suites dans $\mathcal{F}^{\mathbb{N}^*}$ qui approximent toute fonction de la classe C des fonctions créneaux, et en les sommant elles approximent aussi clairement toute fonction de la classe $\mathcal{E}$ des fonctions générées par somme finie de C, au sens de l'IEA en tout cas. Or la proposition 1 nous indique que les fonctions de $\mathcal{E}$ approximent toute fonction uniformément continue au sens de l'IEA. Donc d'après la proposition 3, les fonctions de $\mathcal{F}$ approximent toute fonction uniformément continue (sur un certain intervalle borné prédéfini).

Pour l'IEM cependant, la proposition 2 nous indique qu'on ne peut pas approximer les fonctions en escalier (celles dans $\mathcal{E}$) par des fonctions de $\mathcal{F}$ car les fonctions de $\mathcal{F}$ sont continues tandis que la fonction en escalier e a une discontinuité en 0 et en 1, et par exemple en 0 le terme nous donne la minoration $\text{IEM}(e,\eta) \geq \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$ avec $\eta \in \mathcal{C}$. On obtient par ailleurs l'égalité avec l'approximation 3.

On ne peut donc pas tout à fait appliquer le raisonnement du premier paragraphe pour démontrer des résultats sur l'approximation de fonctions de $\mathcal{C}^0$ (les fonctions continues) par des fractions rationnelles au sens de l'IEM. Pourtant, on va démontrer qu'on a bien :

Théorème 2. *Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ de limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, est approximable au sens de l'IEM par des fractions rationnelles.*

Pour commencer, en s'appuyant sur l'approximation 3, on démontre le résultat suivant :

Lemme 1. *Soit $g \in \mathcal{E}$ une fonction escalier de pas constant $a > 0$. Si son saut est borné, de supremum p, alors on a :*

$$\exists f \in \mathcal{F}, \quad \text{IEM}(f,g) < 2p.$$

Mais avant, on va devoir démontrer quelques inégalités sur certaines fractions rationnelles.

Lemme 2. *Pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, la formule 3 approxime la fonction créneau au sens de l'IEM sur $I = \mathbb{R} \setminus (]-\varepsilon, \varepsilon[\cup]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[)$*

Démonstration. Si $x \in I$, il y a trois cas.
1) Si $x \leq -\varepsilon$, $2x-1 < -2\varepsilon - 1$, et vu que $\varepsilon > 0$, on a $(2x-1)^{2n} \geq (1+2\varepsilon)^{2n}$ donc $0 < f_n(x) \leq \frac{1}{(1+2\varepsilon)^{2n}+1}$. Et vu que $x < 0$ on a en fait $|f_n(x) - e(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{(1+2\varepsilon)^{2n}+1}$.
2) Si $\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon$, alors on a $2\varepsilon - 1 \leq 2x-1 \leq 1-2\varepsilon$, en outre $(2x-1)^{2n} \leq (1-2\varepsilon)^{2n}$ et $1 \geq f_n(x) \geq \frac{1}{(1-2\varepsilon)^{2n}+1}$. Et vu que $0 < x < 1$ on a alors $|f_n(x) - e(x)| = 1 - f_n(x) \leq 1 - \frac{1}{(1-2\varepsilon)^{2n}+1} = \frac{(1-2\varepsilon)^{2n}}{(1-2\varepsilon)^{2n}+1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1-2\varepsilon}\right)^{2n}+1}$. Or on trouve que $\frac{1}{1-2\varepsilon} > 1+2\varepsilon$, en effet on a $0 < 1-2\varepsilon < 1$ et donc $\frac{1}{1-2\varepsilon} > 1+2\varepsilon > 0 \iff 1 > (1-2\varepsilon)(1+2\varepsilon) > 0 \iff 1 > 1-4\varepsilon^2 > 0$, et le dernier encadrement est en fait vrai car $4\varepsilon^2 < 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$. On a donc plus grossièrement $|f_n(x) - e(x)| \leq \frac{1}{(1+2\varepsilon)^{2n}+1}$.
3) f_n et e ont clairement un axe de symétrie $x = \frac{1}{2}$, ce qui permet de directement conclure à partir de la 2) que si $x > 1+\varepsilon$, on a $|f_n(x) - e(x)| \leq \frac{1}{(1+2\varepsilon)^{2n}+1}$.
On a au final $\forall x \in I, |e(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{1-2\varepsilon}\right)^{2n}+1}$ donc $\mathrm{IEM}(e, f_n) < \frac{1}{(1+2\varepsilon)^{2n}+1}$ et vu que $1+2\varepsilon > 1$, on a par les gendarmes $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{IEM}(e, f_n) = \frac{1}{+\infty+1} = 0$, ce qui montre l'approximabilité ! □

Lemme 3.

$$\forall x \in]-1,1[, \frac{1-((x+1)(x-1))^{2k}}{(1+(x+1)^{2k})(1+(x-1)^{2k})} < \frac{1}{k-1}.$$

Démonstration. Tout d'abord on remarque aisément que l'expression ci-dessus est une fonction paire, vu que $(-x+1)^2 = (x-1)^2$ et que $(-x-1)^2 = (x+1)^2$. Aussi pour $x = 0$ on a clairement que l'expression vaut 0. Il suffit donc de démontrer l'inégalité pour $x \in]0,1[$.
Ensuite on peut écrire $((x+1)(x-1))^{2k} = (x^2-1)^{2k} = (1-x^2)^{2k}$, et vu que $x^2 < 1$, on a $-x^2 > -1$ et, par l'inégalité de Bernoulli, $(1-x^2)^{2k} > 1 - 2kx^2$.
En développant $(x+1)^{2k}$ avec le binôme de Newton, on n'a que des termes positifs car $x \geq 0$, avec un terme strictement positif $1 > 0$, donc en particulier on a $(x+1)^{2k} > \binom{2k}{2}x^2 = k(2k-1)x^2$.
Au final, vu que $1 + (x-1)^{2k} > 1$, on déduit de tout ça :

$$\frac{1-(1-x^2)^{2k}}{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})} < \frac{1-(1-2kx^2)}{1 \times (k(2k-1)x^2)} = \frac{2}{2k-1} < \frac{2}{2k-2} = \frac{1}{k-1},$$

ce qui conclut. □

Corollaire 4. *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors pour tout $\varepsilon > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k > N$:*

$$\forall x \in]-1,1[, \left| \left[\frac{1}{1+(x-1)^{2k}} + \frac{\alpha}{1+(x+1)^{2k}} \right] - 1 \right| < |\alpha - 1| + \varepsilon$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+(x-1)^{2k}} + \frac{\alpha}{1+(x+1)^{2k}} &= \frac{1+(x+1)^{2k} + \alpha(1+(x-1)^{2k})}{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})} \\
&= \frac{1+(x+1)^{2k} + 1 + (x-1)^{2k} + (\alpha-1)(1+(x-1)^{2k})}{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})} \\
&= \frac{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k}) + (\alpha-1)(1+(x-1)^{2k}) + 1 - (x+1)^{2k}(x-1)^{2k}}{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})} \\
&= 1 + \frac{\alpha-1}{1+(x+1)^{2k}} + \frac{1-((x-1)(x+1))^{2k}}{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})}.
\end{aligned}$$

Or $\left|\frac{1}{1+(x+1)^{2k}}\right| < 1$ et par le lemme 3, $\frac{1-((x-1)(x+1))^{2k}}{(1+(x-1)^{2k})(1+(x+1)^{2k})} < \frac{1}{k-1}$. Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\forall x \in]-1,1[, \left| \left[\frac{1}{1+(x-1)^{2k}} + \frac{\alpha}{1+(x+1)^{2k}} \right] - 1 \right| < |\alpha-1| + \frac{1}{k-1}.$$

Vu que $\varepsilon > 0$ (axiôme d'Archimède) il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \geq N$, $\frac{1}{k-1} < \varepsilon$ et donc au final on a bien

$$\forall k \geq N, \forall x \in]-1,1[, \left| \left[\frac{1}{1+(x-1)^{2k}} + \frac{\alpha}{1+(x+1)^{2k}} \right] - 1 \right| < |\alpha-1| + \varepsilon.$$

□

Corollaire 5. *On considère deux fonctions créneaux de hauteurs différentes mais de même largeur, i.e on considère $0 \neq \alpha \neq \beta \neq 0$ (les hauteurs), $l > 0$ (la largeur), $d \in \mathbb{R}$ (le décalage) et la fonction $\alpha e(\frac{x-d}{l}) + \beta e(\frac{x-d}{l} - 1)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, on ait*

$$\forall x \in](d+l) - \frac{l}{2}, (d+l) + \frac{l}{2}[, \left| \left[\alpha f_k(\frac{x-d}{l}) + \beta f_k(\frac{x-d}{l} - 1) \right] - \left[\alpha e(\frac{x-d}{l}) + \beta e(\frac{x-d}{l} - 1) \right] \right| < |\alpha - \beta| + \varepsilon$$

Démonstration. Avec le changement de variable $y = \frac{x-d}{l}$, on revient à l'inégalité

$$\forall y \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[, |[\alpha f_k(y) + \beta f_k(y-1)] - [\alpha e(y) + \beta e(y-1)]| < |\alpha - \beta| + \varepsilon.$$

Notons que si $y = 1$, alors on obtient $\alpha f_k(0) + \beta f_k(1) - \alpha e(0) - \beta e(1) = 0 < 2|$ d'après la remarque 1. On a alors deux possibilités.
Cas 1 : $y > 1$
En posant $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} \neq 1$, on revient à l'inégalité

$$\forall y \in]1, \frac{3}{2}[, \quad |[\gamma f_k(y) + f_k(y-1)] - [\gamma e(y) + e(y-1)]| < |\gamma - 1| + \left| \frac{\varepsilon}{\beta} \right|$$

On a $e(y) = 0$ car $y > 1$ et $e(y-1) = 1$ car $0 < y - 1 < 1$. On se ramène donc à étudier

$$\forall y \in]1, \frac{3}{2}[, \quad \left| \frac{\gamma}{1 + (2y-1)^{2k}} + \frac{1}{1 + (2(y-1)-1)^{2k}} - 1 \right| < |\gamma - 1| + \left| \frac{\varepsilon}{\beta} \right|$$

Avec le changement de variable $z = 2y - 2$, on revient à démontrer pour $\left|\frac{\varepsilon}{\beta}\right| > 0$ qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N'$:

$$\forall z \in]0, 1[, \quad \left| \frac{\gamma}{1 + (z+1)^{2k}} + \frac{1}{1 + (z-1)^{2k}} - 1 \right| < |\gamma - 1| + \left| \frac{\varepsilon}{\beta} \right|.$$

Ce qui est vrai en vertu du corollaire 4, vu que $]0, 1[\subset] - 1, 1[$.
Cas 2 : $y < 1$
En posant $\gamma = \frac{\beta}{\alpha} \neq 1$, on se ramène à l'inégalité :

$$\forall y \in]\frac{1}{2}, 1[, \quad |[f_k(y) + \gamma f_k(y-1)] - [e(y) + \gamma e(y-1)]| < |\gamma - 1| + \left| \frac{\varepsilon}{\alpha} \right|.$$

Or $e(y) = 1$ car $0 < y < 1$ et $e(y-1) = 0$ car $y - 1 < 0$. On doit donc étudier

$$\forall y \in]\frac{1}{2}, 1[, \quad \left| \frac{1}{1 + (2y-1)^{2k}} + \frac{\gamma}{1 + (2(y-1)-1)^{2k}} - 1 \right| < |\gamma - 1| + \left| \frac{\varepsilon}{\alpha} \right|.$$

En effectuant le changement de variable $z = 2 - 2y$, on a $(2y-1)^2 = (-(2-2y)+1)^2 = (1-z)^2 = (z-1)^2$, et $(2(y-1)-1)^2 = (2y-3)^2 = (-(2-2y)-1)^2 = (-z-1)^2 = (z+1)^2$. On revient à démontrer que pour $\left|\frac{\varepsilon}{\alpha}\right| > 0$, il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N''$,

$$\forall z \in] - 1, 0[, \quad \left| \frac{1}{1 + (z-1)^{2k}} + \frac{\gamma}{1 + (z+1)^{2k}} - 1 \right| < |\gamma - 1| + \left| \frac{\varepsilon}{\alpha} \right|.$$

Ce qui est vrai en vertu du corollaire 4, vu que $] - 1, 0[\subset] - 1, 1[$.

En prenant $N = \max(N', N'')$ a bien pour tout $k \geq N$ l'inégalité voulue ! □

On a maintenant tout ce qu'il faut pour démontrer qu'on peut approximer une fonction en escalier par des fractions rationnelles, à $2p$ près.

Preuve du lemme 1.

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i})$$

On a $\forall i, |\alpha_{i+1} - \alpha_i| \leq p$. On peut approximer cette fonction grâce à l'approximation 3 :

$$G_k(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_k(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i})$$

Soit $\delta < \frac{1}{2}\min\{x_{i+1} - x_{i+1} : i \in [\![0, n]\!]\}$.
On démontre qu'il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sup\{|G_M(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\} < 2p$. Si on a un nombre fini d'intervalles I dont la réunion est $\mathbb{R}$, de façon à ce que pour chaque intervalle il existe m tel que $\{|G_m(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\} < 2p$, alors il suffit de prendre M comme le plus grand de ces m obtenus. On regarde alors les cas de différents intervalles.

Cas 1) $I = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in [\![0,n-1]\!]}]x_i - \delta, x_i + \delta[$
Dans ce cas on a pour $x \in I$ que pour chaque i, si $x \leq x_i - \delta$, alors, $\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \leq \frac{-\delta}{x_{i+1} - x_i}$, si $x_i + \delta < x < x_{i+1} - \delta$, alors $\frac{\delta}{x_{i+1} - x_i} < \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} < 1 - \frac{\delta}{x_{i+1} - x_i}$ si $x \geq x_{i+1} + \delta[$, alors $\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \geq \frac{\delta}{x_{i+1} - x_i} + 1$. Donc en appliquant le lemme 2 avec $\frac{\delta}{x_{i+1} - x_i} > 0$, on a que $|f_{m_i}\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) - e\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)|$ peut être arbitrairement petit avec $x \in I$.
Prenons maintenant la quantité $\frac{p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} > 0$, on considère pour chaque i un entier m_i tel que $\forall x \in I, |f_{m_i}\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) - e\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)| < \frac{p}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}$, et en prenant $m = \max\{m_i : i \in [\![0, n]\!]\}$ il vient

$$\forall x \in I, |G_m(x) - g(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left| f_m\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) - e\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)\right| < \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{p}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} = p.$$

Ce qui conclut le Cas 1).

Cas 2) $I = \bigcup_{i \in [\![0,n-1]\!]}]x_i - \delta, x_i + \delta[$
On démontre qu'on a un tel M pour chaque intervalle $]x_i - \delta, x_i + \delta[$, ce qui conclura. Si $x \in]x_i - \delta, x_i + \delta[$, on a pour tout $j \neq i, i-1$ que $f_k(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j})$ peut être arbitrairement petit avec k grand, la preuve est similaire à quand on démontre que les termes sont arbitrairement petits dans le Cas 1.
Maintenant on étudie le terme $t_k(x) = \alpha_{i-1} f_k\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) + \alpha_i f_k\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)$. Le pas est constant donc on a $a = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$, et en particulier $x_i = x_{i-1} + a$ et donc on peut réécrire

$$t_k(x) = \alpha_{i-1} f_k\left(\frac{x - x_{i-1}}{a}\right) + \alpha_i f_k\left(\frac{x - x_i}{a} - 1\right),$$

$$\alpha_{i-1} e\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) + \alpha_i e\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) = \alpha_{i-1} e\left(\frac{x - x_{i-1}}{a}\right) + \alpha_i e\left(\frac{x - x_i}{a} - 1\right).$$

Soit un réel ε avec $0 < \varepsilon < p$, on a $0 < p - \varepsilon < p$. D'après le corollaire 5, il existe bien un entier M' tel que pour tout $k \geq M'$,

$$\forall x \in]x_i - \delta, x_i + \delta[, \left| t_k(x) - e\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) - e\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)\right| < |\alpha_{i-1} - \alpha_i| + p - \varepsilon \leq 2p - \varepsilon.$$

D'après la remarque ci-dessus, pour chaque $j \neq i, i-1$, il existe m_j tel que pour tout $k \geq m_j$,

$$\left| f_k\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) - e\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}.$$

En prenant $M = \max(M', m_1, \ldots, m_n)$ on a donc finalement par l'inégalité triangulaire

$$\forall k \geq M, \forall x \in]x_i - \delta, x_i + \delta[, |G_m(x) - g(x)| < (n + 1 - 2) \times \frac{\varepsilon}{2(n-1)} + 2p - \varepsilon = 2p - \frac{\varepsilon}{2} < 2p$$

Ce qui conclut ! ☐

On peut maintenant faire la démonstration.

Preuve du théorème 2. Soit g une telle fonction. Par le théorème de Heine [1], on sait que g est uniformément continue. Il suffit de démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction f telle que $\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon$ (on peut alors construire une approximation en prenant les fonctions obtenues en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ quand n parcourt $\mathbb{N}^*$).
Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$. On va d'abord construire une fonction créneau c telle que $\mathrm{IEM}(g, c) \leq \delta$. Puis on construire une fraction rationnelle f telle que $\mathrm{IEM}(c, g) < 2\delta$. Par inégalité triangulaire (voir corollaire 3) on aura alors $\mathrm{IEM}(g, f) < 3\delta = \varepsilon$, ce qui concluera
Il existe deux réels $a < b$ tels que $\forall x < a, |g(x)| < \delta$ et $\forall x > b, |g(x)| < \delta$. Ainsi, si une approximation c est telle que $\forall x \in]-\infty, a[\cup]b, \infty[, c(x) = 0$, on a $\forall x \in]-\infty, a[\cup]b, \infty[, |f(x) - g(x)| = |-g(x)| < \delta$, ce qui signifie que l'approximation est correcte sur cet ensemble.

Maintenant pour l'intervalle $[a,b]$, on considère l'approximation canonique 2 de la fonction $f_{|[a,b]}$, ce qui nous donne une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{[a,b]}$. Par continuité uniforme, on peut prendre $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in [a,b], |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \epsilon$. Vu que $\frac{\delta}{b-a} > 0$, par archimède, il existe n tel que $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{b-a}$. On considère alors la fonction escalier $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme vérifiant :

$$c(x) = \begin{cases} c_n(x) & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Le saut de c est d'au plus δ. En effet, on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, que avec $x, y \in [a+\frac{k+1}{n}(b-a), a+\frac{k+1}{n}(b-a)]$, on a $|x-y| \leq |[a+\frac{k}{n}(b-a)]-[a+\frac{k}{n}(b-a)]| = \frac{b-a}{n} < \delta$, donc en particulier $|g(a+\frac{k+1}{n}(b-a))-g(a+\frac{k}{n}(b-a))| < \delta$ (et ce pour tout k) : pour l'approximation c_n, cela revient à dire que son saut est borné par δ. On a même mieux, par définition de a, b on a $|c(a)-0| = |g(a)| < \delta$ et $|c(b)-0| = |g(b)| < \delta$, donc le saut de la fonction c est bien plus petit que δ.
2) On va avoir $\mathrm{IEM}(g,c) < \delta$. Quand $x \notin]a,b[$ on a $|g(x)-c(x)| = |g(x)-0| \leq \delta$ comme vu plus haut. Maintenant quand $x \in]a+\frac{k}{n}(b-a), a+\frac{k+1}{n}(b-a)[$, en prenant $y = a+\frac{k}{n}(b-a)$, on a $g(y) = c(x)$ et on a (voir 1.) que $|g(x)-g(y)| < \delta$, i.e (définition de c_n) $|g(x)-c(x)| < \delta$. Et enfin quand $x = a+\frac{k}{n}(b-a)$ pour $k \geq 1$, on a :

$$|g(x)-c(x)| = |g(x) - [\frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(x - \frac{b-a}{n})]| = \frac{1}{2}|g(x) - g(x - \frac{b-a}{n})| < \frac{\delta}{2} < \delta$$

En effet x et $x - \frac{b-a}{n}$ sont dans l'intervalle $[a+\frac{k-1}{n}(b-a), a+\frac{k}{n}(b-a)]$. Cela conclut la première partie de la démo.

On peut en fait conclure. Par le lemme 2 appliqué à la fonction c, ayant un saut d'au plus δ d'après 1), on peut prendre une fraction rationnelle f telle que $\mathrm{IEM}(c,f) < 2\delta$, ce qui joint à 2) nous donne bien ce qu'il fallait démontrer. □

4 Les fractions rationnelles

Le but de cette section va être d'étudier les fractions rationnelles (et suites de fractions rationnelles), dans le but final de démontrer que des fractions rationnelles de degré borné ne peuvent pas converger simplement 3 vers la fonction créneau. En particulier cela montrera qu'on a vraiment besoin d'augmenter le degré petit à petit dans la suite pour avoir une convergence simple, comme dans l'approximation 3. Au vu des différents problèmes causés par les pôles (définis plus bas dans la section), on aura besoin de la définition suivante.

Définition 14 (Convergence simple relaxée)**.** *Soit une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie partout sauf en un nombre fini de points, on dira qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (pas forcément définies partout), convergent simplement au sens faible, s'il existe un ensemble E fini de réels (appelé ensemble des points particuliers), tel que pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus E$, g est bien défini en x, et il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f_n(x)$ est bien défini et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$ et la définition de la limite ne cherche pas le rang dans $\mathbb{N}^*$ mais dans $[\![N, +\infty[\![$.*

4.1 Généralités sur les fractions rationnelles

Une fraction rationnelle $f = \frac{P}{Q}$ est le quotient de deux polynômes P et Q, définie sur $\mathbb{C}$ privé des racines de Q. En définissant l'addition de fractions rationnelles comme une addition classique où on met au même dénominateur, on peut les manipuler comme objets formels comme des couples (P,Q) de polynômes formels, avec leur fonction associée qui est définie par la division classique.
Le degré la fraction rationnelle f est en général défini comme $\deg f = \deg P - \deg Q$ (en particulier on a toujours la propriété $\deg ff' = \deg f + \deg f'$, et la def coïncide avec le degré d'un polynôme quand Q constant non-identiquement-nul, si Q est nul on a $\deg F = +\infty$ et si P est nul on a $\deg F = -\infty$). Dans le présent document on définira le degré de la fraction rationnelle comme $\deg f = \max(\deg P', \deg Q')$ où P' et Q' sont des polynômes premiers entre eux tels que $f = \frac{P'}{Q'}$, et vaut $-\infty$ si $P = 0$ ou $Q = 0$. Attention, cette définition ne respecte plus la propriété $\deg ff' = \deg f + \deg f'$. On a le résultat suivant sur les asymptotes de fraction rationnelle :

$$f = \frac{\sum_{k=0}^{max(\deg P, \deg Q)} p_k x^k}{\sum_{k=0}^{\max(\deg Q, \deg P)} q_k x^k} \implies \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{p_{\max(\deg Q, \deg P)}}{q_{\max(\deg Q, \deg P)}}$$

avec la convention $\frac{1}{0} = \infty$, donc en particulier si $deg(Q) > \deg(P)$ la limite vaut 0 et sinon elle vaut $\mathrm{sgn}(p_{\max(\deg Q, \deg P)})$, et pour avoir la limite en ∞ on pose $g(x) = f(-x)$.
Voici une proposition connue importante.

Théorème 3 (Décomposition en éléments simples)**.** *Soit f une fraction rationnelle et $r_1, r_2, ..., r_k$ les k racines de Q, avec $m_1, ..., m_k$ leurs multiplicités respectives. Il existe des nombres complexes $\alpha_{i,j}$ tels que*

$$f = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\alpha_{i,j}}{(x - r_i)^j}.$$

On peut donc écrire f sous sa forme avec numérateur et dénominateur développé, ou bien sous sa forme décomposée en éléments simples. On peut aussi l'écrire sous sa forme scindée grâce au théorème fondamental de l'algèbre, mais où on regroupe les deux coefficients dominants de P et Q avec leur quotient α. Ici les p_k ne sont pas nécessairement distincts, et de même pour les q_k.

$$f = \alpha \frac{\prod_{k=0}^{\deg P} (x - p_k)}{\prod_{k=0}^{\deg Q} (x - q_k)}$$

Les racines du dénominateurs sont appelées les *pôles* de la fonction.

4.2 Bolzano et équivalents sur les complexes

On remarque que les racines peuvent être complexes et on va devoir faire de l'analyse avec. Il convient donc de rappeler les limites de nombres complexes. On peut définir la limite d'une suite de complexes de façon similaire à la définition avec les réels, en reprenant la définition qui utilise la valeur absolue avec $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |u_{n_0} - l| < \varepsilon$, où on remplace la valeur absolue par la norme sur les complexes (c'est donc exactement la définition qu'on vient d'écrire mais avec u_{n_0} et l complexes). On remarque que cette définition coïncide avec celle des réels quand on parle de suites de réels, donc on peut bien l'utiliser ici. Il n'est pas dur non plus de démontrer que les propriétés d'opération sur les limites est conservée pour les limites de nombres complexes.

On note que cette définition est équivalente à $\lim_{n\to\infty} |u_n - l| = 0$ avec la limite ici au sens réel. Il n'est enfin pas difficile de démontrer que si une suite de nombres complexes $((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ converge en module et en argument (i.e les suites $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\arg(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge) alors elle est convergente (tout court).

On aura besoin du célèbre théorème d'analyse suivant, dont on repompe la démonstration, et de quelques uns de ses corollaires.

Théorème 4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle bornée. Elle admet alors une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel l. (Ici $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.)*

Démonstration. Soit b_0 la borne supérieure de cette suite réelle, et a_0 sa borne inférieure. Si $b_0 = a_0$ on peut prendre $\phi(n) = n$ et on a fini, on suppose donc que $b_0 > a_0$. On pose $C_0 = \mathbb{N}$. Clairement, un des deux ensembles $B_0 = \{n \in \mathbb{N} : u_n \geq \frac{b+a}{2}$ et $A_0 = \{n :\in C_0 : u_n < \frac{b+a}{2}$ est infini, car $A_0 \cup B_0 = \mathbb{N} = C_0$: un élément de la suite est soit plus petit que $\frac{b_0+a_0}{2}$ soit plus grand que $\frac{b+a}{2}$. Si A_0 est infini : on pose $\varphi(0) = \min A_0$, $C_1 = A_0 \setminus \varphi(0)$, $b_1 = \frac{b_0+a_0}{2}$ et $a_1 = a$ (on a bien $b_1 > a_1$). Sinon si B_0 est infini, on pose $\varphi(0) = \min B_0$, $C_1 = B_0$, $b_1 = b$ et $a_1 = \frac{b_0+a_0}{2}$ (on a bien $b_1 > a_1$). Puis on réitère le processus. Pour chaque b_n, a_n, B_n, A_n, C_n, on coupe C_n en deux ensembles B_n et A_n, respectivement les indices des termes de (u_n) plus grand que $\frac{b_n+a_n}{2}$ et plus petit que $\frac{b_n+a_n}{2}$ respectivement, un des deux est infini car C_n est infini, on pose $\phi(n)$ comme le minimum de l'ensemble infini, on défini cet ensemble comme C_{n+1} et on actualise les bornes.
Il est clair par définition que pour tout n, $u_{\varphi(n)} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Or pour chaque n, si $b_{n+1} = \frac{b_n+a_n}{2}$ on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n+a_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2}$ et si $a_{n+1} = \frac{b_n+a_n}{2}$ alors $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{b_n+a_n}{2} = \frac{b_n-a_n}{2}$, donc dans les deux cas $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ et par récurrence immédiate $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$, en particulier $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$. Aussi il est clair que $\forall i < j, b_i \geq b_j \geq a_j \geq a_i$, et en fait il est intuitif (mais c'est le théorème des suites adjacentes) que (b_n) et (a_n) convergent (elles sont décroissantes et bornées), vers une même limite (c'est du à la limite de $(b_n - a_n)$). Or vu que $\forall n, a_{n+1} < u_{\varphi(n)} < b_{n+1}$, et que les bornes convergent vers une limite l, on a (théorème des gendarmes) que la limite de $(u_{\varphi(n)})$ existe et vaut l, ce qui conclut. □

Corollaire 6. *Toute suite de nombres complexes admet une sous-suite qui converge en argument. C'est à dire que pour toute suite de nombres complexes $(z_n)_{n\to N}$, il existe une fonction $\varphi(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que* $\arg(z_n)$ *converge en argument.*

Démonstration. Par définition de l'argument, pour tout n, $\arg(z_n) \in]-\pi, \pi]$. Ainsi $\arg(z_n)$ est bornée (par $-\pi$ et π par exemple), et par le théorème 4 elle admet une sous-suite bornée. En utilisant la fonction croissante φ telle que $\arg(z_{\varphi(n)})$ converge, on a bien que $(z_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite qui converge en argument.
NB : l'argument peut converger vers $-\pi$, dans ce cas sa valeur limite est en fait π, mais ça ne change pas le raisonnement. □

Corollaire 7. *Si une suite complexe admet une sous-suite de module borné, alors elle admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe avec l'existence d'une suite $(|z_{\varphi(n)}|)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, et donc d'après le théorème 4 on a une sous-suite $(|z_{\varphi(\phi(n))}|)$ qui converge vers un réel. Ainsi la sous-suite $(z_{\varphi(\phi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en module, mais elle converge aussi en argument par le corollaire 6, donc elle converge vers un complexe précis tout court, ce qui conclut. □

La proposition suivante sera aussi utile :

Proposition 5. *Si une suite de complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune sous-suite de module borné, alors elle admet une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$.*

Démonstration. Soit un réel $r \geq 0$, l'intervalle $[0, r]$ ne peut pas admettre un nombre infini d'éléments de $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sinon on aurait une sous-suite de module bornée, donc il n'y en a qu'un nombre fini : en prenant le dernier complexe dans cet intervalle d'indice n_0, on obtient que pour tout $n > n_0$ que $|z_n| > r$. On vient de démontrer que :

$$\forall r \geq 0, \exists n_0, \forall n > n_0, |z_n| \geq r$$

Ce qui est équivalent $\lim_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$, comme voulu. □

On rappelle la notion d'équivalence à l'infini. Soient deux suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ si et seulement si il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 telle que $a_n = (1+\varepsilon_n)b_n$ à partir d'un certain rang. Cela revient à dire que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n \iff \lim_{n\to} \frac{a_n}{b_n} = 1$ quand b_n est non-nul à partir d'un certain rang. Il est alors assez aisé de démontrer que c'est une relation d'équivalence. On a aussi le résultat suivant :

Proposition 6. *Si c est une constante complexe et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $|z_n|$ tend vers $+\infty$, alors $c + z_n \underset{n\to\infty}{\sim} z_n$.*

Démonstration. On a $\lim_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$ donc $\lim_{n\to\infty}\frac{|c|}{|z_n|} = 0$, càd $\lim_{n\to\infty}|\frac{c}{z_n} - 0| = 0$ ce qui motnre que $\lim_{n\to\infty}\frac{c}{z_n} = 0$ et on a donc $\lim_{n\to\infty}\frac{c+z_n}{z_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{c}{z_n} + 1 = 0 + 1 = 1$ ce qui montre bien l'équivalence souhaitée. □

Par ailleurs la définition avec $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ permet de démontrer très aisément que $(a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n \wedge u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n) \implies a_n u_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n v_n$, ce qui montre avec une récurrence rapide que l'équivalence à l'infini est stable par multiplication. On montre aussi qu'elle est stable par l'inverse (et donc immédiatement par quotient) :

$$a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n \iff \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1 \iff \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{a_n}} = 1 \iff \frac{1}{b_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a_n} \iff \frac{1}{a_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{b_n}$$

On a enfin cette dernière propriété évidente. La notion d'équivalence à l'infini est d'ailleurs un concept plus puissant que la simple égalité entre limites.

Proposition 7. *Si $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ et que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Démonstration. Par symétrie de la relation, on a $b_n = (1+\varepsilon_n)a_n$ avec $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ et par opérations sur les limites on a bien $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. □

4.3 Fermeture des fractions rationnelles de degré borné

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fractions rationnelles et $\mathcal{F}_d$ celles de degré inférieur ou égal à d. On démontre que pour tout d, $\mathcal{F}_d$ est fermé, c'est à dire qu'une suite convergente (au sens faible 14) d'éléments de $\mathcal{F}_d$ tend vers un élément de $\mathcal{F}_d$. Plus précisément on va démontrer que

Proposition 8 (Fermeture des fractions rationnelles)**.** *Si une suite de fractions rationnelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont le degré du numérateur est d_1 et celui du dénominateur d_2 est convergente au sens faible (14) avec E l'ensemble des points particuliers, alors sa limite est elle-même une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont le degré du numérateur est inférieur ou égal à d_1 et celui du dénominateur inférieur ou égal à d_2.*

Démonstration. On écrit f_n sous sa forme scindée :

$$f_n = \alpha_n \frac{\prod_{k=0}^{d_1}(x - p_{k,n})}{\prod_{k=0}^{d_2}(x - q_{k,n})}.$$

On a $\alpha_n \in \mathbb{R}$ car la fraction rationnelle est à coefficients réels, mais les racines peuvent être complexes.

On va trouver une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge au sens faible vers une fraction rationnelle, ce qui permettra de conclure vu que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente elle converge vers la même limite que sa sous-suite. (Ceci est vrai même au sens faible, car en chaque point x, la sous-suite évaluée en x sera bien définie à partir d'un rang N, et la suite entière bien définie aussi à partir du rang N étant convergente elle n'a qu'une valeur d'adhérence et on a la même propriété). On notera $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les fonctions strictement croissantes successives qu'on va construire, où $\varphi_{k+1} = \varphi_k \circ \phi_k$ pour une certaine fonction strictement croissante $\phi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, et on commence avec $\varphi_0 : x \to x$. S'il existe m_0 tel que $(p_{m_0,\varphi_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite de module bornée alors par le corollaire 7 elle admet une sous-suite $(p_{m_0,\varphi_0(\phi_0(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, et on se restreint désormais aux indices $\phi_1 = \varphi_0(\phi_0(n))$. Maintenant s'il existe $m_1 \neq m_0$ tel que $(p_{m_1,\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admette une sous-suite de module borné, alors on introduit de même $\varphi_2(n)$ tel que $(p_{m_1,\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et on note qu'on a toujours $(p_{m_0,\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge toujours car est sous-suite d'une suite convergente. En continuant le processus comme ceci on a s indices $m_0, ..., m_{s-1}$ distincts deux à deux tels que $(p_{m_i,\varphi_s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent tous. On continue le processus mais cette fois-ci avec les $(q_{m_i'}, \varphi_{s'}(n))_{n\in\mathbb{N}}$, où $s' > s$. A la fin (le processus se finit forcément car il y a un nombre fini de racines), on se retrouve avec les $(p_{m_i,\varphi_{s'}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_{m_i',\varphi_{s'}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent toutes, tandis que toutes les autres suites de racines n'admettent aucune sous-suite de module borné. Soit $(p_m, \varphi_{s'}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une de ces sous-suites, on a par la proposition 5 qu'elle admet une sous-suite de module qui tend vers $+\infty$, on prend donc encore cette sous-suite indexée par ϕ avec $\varphi_{s'+1}(n) = \varphi_{s'} \circ \phi$. On réitère le processus pour tous les $m \neq m_i, m_i'$. Cela ne change pas les limites des suites indexées précédemment. Notre fonction d'indexation au final est $\varphi_{d_1+d_2}$ car on a réindexé une fois toutes les suites (dont certaines peuvent être triviales avec $\phi : n \to n$), où chaque suite $(p_{k,\varphi_{d_1+d_2}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est soit convergente si $k = m_i$ pour un certain i, soit tend vers l'infini en module si ce n'est pas le cas, et similairement pour $(q_{k,\varphi_{d_1+d_2}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $k = m_i'$. On peut donc écrire au final

$$f_{\varphi_{d_1+d_2}(n)}(x) = \alpha_{\varphi_{d_1+d_2}(n)} \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{s-1}(x - p_{m_i,\varphi_{d_1+d_2}(n)}) \prod_{m\neq m_0,\dots,m_s} (x - p_{m,\varphi_{d_1+d_2}(n)})}{\displaystyle\prod_{i=0}^{s'-s-1} (x - q_{m_i',\varphi_{d_1+d_2}(n)}) \prod_{m'\neq m_0',\dots,m_{s-s'-1}'} (x - q_{m',\varphi_{d_1+d_2}(n)})}$$

On étudie la limite de cette fonction en sachant qu'elle doit converger. On la sépare en deux parties u_n, v_n où $f_{\varphi_{d_1+d_2}(n)} = u_n v_n$ et :

$$u_n(x) = \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{s-1}(x - p_{m_i,\varphi_{d_1+d_2}(n)})}{\displaystyle\prod_{i=0}^{s'-s-1} (x - q_{m_i',\varphi_{d_1+d_2}(n)})}$$

$$v_n(x) = \alpha_{\varphi_{d_1+d_2}(n)} \frac{\displaystyle\prod_{m\neq m_0,\dots,m_s} (x - p_{m,\varphi_{d_1+d_2}(n)})}{\displaystyle\prod_{m'\neq m_0',\dots,m_{s-s'-1}'} (x - q_{m',\varphi_{d_1+d_2}(n)})}$$

Chaque suite qu'on retrouve dans l'expression de u_n, i.e $(p_{m_i,\varphi_{d_1+d_2}(n)})_{n\in\mathbb{N}}, (q_{m_i',\varphi_{d_1+d_2}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout i ont (par construction) une limite pour $n \to \infty$ qu'on va noter respectivement pour chaque i, l_{m_i} pour le suites p et $l_{m_i'}$ pour les suites q (on note que les limites peuvent être dans $\mathbb{C}$). On a alors par opérations sur les limites :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\{l_{m_i'} : i \in [\![0, s'-s-1]\!]\}^{\mathrm{e}}\right), \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{s-1}(x - l_{m_i})}{\displaystyle\prod_{i=0}^{s'-s-1} (x - l_{m_i'})}$$

On remarque que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (et est non-nul à un nombre fini de valeurs de x près), or $(f_{\varphi_{d_1+d_2}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge par hypothèse donc $v_n = \frac{f_{\varphi_{d_1+d_2}(n)}}{u_n}$ converge aussi pour $n \to \infty$. Or chaque suite $(p_{m,\varphi_{d_1+d_2}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_{m,\varphi_{d_1+d_2}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ apparaissant dans l'expression de v_n sont telles que leur module tend vers l'infini (et de même pour leur opposé), donc par la proposition 6, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus E, x - p_{m,\varphi_{d_1+d_2}(n)} \underset{n\to\infty}{\sim} -p_{m,\varphi_{d_1+d_2}(n)}$, et enfin par stabilité par produit/quotient de l'équivalence à l'infini on a (on multiplie/divise toutes les équivalences entre elles) :

$$\forall x, v_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha_{\varphi_{d_1+d_2}(n)}(-1)^{d_1-s-(d_2-(s'-s))} \frac{\displaystyle\prod_{m\neq m_0,\dots,m_s} p_{m,\varphi_{d_1+d_2}(n)}}{\displaystyle\prod_{m'\neq m'_0,\dots,m'_{s-s'-1}} q_{m',\varphi_{d_1+d_2}(n)}}$$

Or par la proposition 7, vu que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout x (hormis un nombre fini d'exceptions), le membre de droite doit aussi converger. On note L la limite du membre de droite et on remarque qu'elle ne dépend pas de x. Ainsi, toujours par la proposition 7 appliquée à chaque x on a : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{l_{m'_i} : i \in [\![0, s'-s-1]\!]\}, \lim_{n\to\infty} v_n(x) = L$. Finalement on a bien, par opérations sur les limites, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{l_{m'_i} : i \in [\![0, s'-s-1]\!]\}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} f_{\varphi_{d_1+d_2}(n)}(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} v_n(x)u_n(x)\\ &= L\frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{s-1}(x-l_{m_i})}{\displaystyle\prod_{i=0}^{s'-s-1}(x-l_{m'_i})}\end{aligned}$$

La limite est donc une fraction rationnelle avec le degré du numérateur $s \le d_1$ et celui du dénominateur $s'-s \le d_2$ (c'est évident par construction car on n'a que retiré des facteurs au possible). Il est de plus clair qu'une suite de fractions rationnelles à valeur dans $\mathbb{R}$ ne peut que tendre vers une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$, donc la fraction rationnelle limite est bien à valeur dans $\mathbb{R}$.
Et enfin vu qu'elle est à valeur dans $\mathbb{R}$, elle est en fait aussi bien à coefficients dans $\mathbb{R}$. En effet, elle est au moins à coefficients dans $\mathbb{C}$ au vu de la limite au dessus, et on peut donc écrire la fraction rationnelle f sous la forme $\frac{P+iQ}{P'+iQ'}$ avec $P, Q, P', Q' \in \mathbb{R}[X]$ (en séparant les parties réelles et imaginaires des coefficients). Cette dernière fraction est égale $\frac{(P+iQ)(P'-iQ')}{(P'+iQ')(P'-iQ')} = \frac{PP'+QQ'+i(QP'-Q'P)}{P'^2+Q'^2}$. Donc $\mathrm{Re}(f) = \frac{PP'+QQ'}{P'^2+Q'^2}$ et $\mathrm{Im}(f) = \frac{QP'-Q'P}{P'^2+Q'^2}$ car ces dernières expressions sont bien des fractions rationnelles à coefficient dans $\mathbb{R}$. Or f est à valeur dans $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{Re}(f)(x)$, ce qui implique par rigidité $f = \frac{PP'+QQ'}{P'^2+Q'^2}$ qui est bien à coefficients réels. $\square$

Corollaire 8 (Fermeture des fractions rationnelles de degré borné)**.** *Si une suite de fractions rationnelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à d est convergente, alors sa limite est elle-même une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{R}$ de inférieur ou égal à d.*

Démonstration. Pour une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de degré borné d (à valeur dans $\mathcal{F}_d$) convergente, parmi tous les couples d'entiers naturels (d_1, d_2) tels que $m \le d$ et $n \le d$ au moins un est tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une infinité de fractions rationnelles de numérateur de degré m et de dénominateur de degré (d_1, d_2). En effet si ce n'était pas le cas, vu qu'il y a un nombre fini de couples (d_1, d_2) avec chacune un nombre fini d'éléments dans la suite, on aurait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est finie ce qui n'est pas possible. On a donc une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (à valeurs dans $\mathcal{F}_d$) qui vérifie les hypothèse de la proposition 8, elle admet donc comme limite une fraction rationnelle l qui est toujours dans $\mathcal{F}_d$, et par conséquent vu que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente elle converge aussi vers l, ce qui montre bien que sa limite est aussi dans $\mathcal{F}_d$ et montre bien la fermeture. $\square$

Un corollaire immédiat de ceci est que la fonction créneau n'est pas approximable par une suite de fractions rationnelles. On peut cependant reprendre les idées de la démonstration ci-dessus pour montrer que cette fonction là n'est pas approximable, mais en plus puissant en démontrant l'impossibilité en supposant la convergence seulement pour un nombre fini de points.

Lemme 4. *Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n, et $n+1$ nombres complexes $x_1, ..., x_{n+1}$ distincts. Alors*

$$\max\{|P(x_i)| : i \in [\![1, n]\!]\} \ge \left(\min\left\{\frac{1}{2}|x_i - x_j| : i \neq j\right\}\right)^n.$$

Démonstration. On note $D = \min\left\{\frac{1}{2}|x_i - x_j| : i \neq j\right\}$ (c'est la borne de l'énoncé). Pour tout $r \in \mathbb{C}$, si $|r - x_i| < D$ pour un certain i, alors pour tout j on a $|r - x_j| > D$. En effet par l'inégalité triangulaire $|x_i - r| + |r - x_j| \ge |x_i - x_j| \ge 2D$, or $|x_i - r| + |r - x_j| < D + |r - x_j|$ donc $2D < |r - x_j| + D$ c'est à dire $|r - x_j| > D$.

On note $(r_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ les racines (non-nécessairement distinctes) de P. On considère l'ensemble $E = \{(i, j) : |x_i - r_j| < D\}$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a démontré qu'il existe au plus un $i \in [\![1, n+1]\!]$ tel que $|x_i - r_j| < D$, or il y a au plus n valeurs de j possibles donc $|E| \le n$. Mais on a aussi $n+1$ valeurs de i possibles, donc par le principe des tiroirs il existe un i_0 qui n'apparaît jamais dans E, c'est-à-dire $\forall j \in [\![1,n]\!], (i_0, j) \notin E$. Autrement dit, $\forall j\ |x_{i_0} - r_j| \geq D$. Il en résulte que

$$\max\{|P(x_i)| : i \in [\![1,n]\!]\} \geq |P(x_{i_0})| = \prod_{j=1}^{n} |x_{i_0} - r_j| \geq \prod_{j=1}^{n} D = D^n.$$

□

Pour les polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ on a en fait un résultat plus fort qu'on ne va pas complètement explicité ici, car il ne nous est pas utile. En fait si on a des racines réelles $x_1 < x_2 < ... < x_m$, alors le produit $\prod_{k=1}^{m}(x - x_i)$ sera gros car on a : $x - x_i = x - x_j + \sum_{k=i}^{j-1} |x_{k+1} - x_k| \geq x - x_j + (j-i)\min\{|x_u - x_v| : u \neq v\}$, et donc on peut probablement obtenir un facteur pour la borne inférieure qui ressemble à $\left(\frac{n}{2}\right)!$. En prenant en compte que chaque racine du polynôme va de paire avec son conjugué, on doit pouvoir obtenir un résultat similaire.

Corollaire 9. *Soit f une fraction rationnelle de coefficient dominant α où les racines du dénominateur ont un module borné par $R > 0$, de degré de numérateur a et de degré de dénominateur b. Soient $m \geq a + b + 1$ complexes distincts qu'on nomme $x_1, ..., x_m$, alors il existe i tel que*

$$|f(x_i)| \geq |\alpha| \frac{\min\{|x_i - x_j| : i \neq j\}^a}{2^a(|x_i| + R)^b}.$$

Démonstration. Le dénominateur admet au plus b racines, donc parmi les $a + b + 1$ complexes il y en au moins $a+1$ pour lesquels la fraction est bien définie. On a $a+1$ complexes pour a racines donc on applique le lemme 4 pour trouver une borne pour le numérateur pour un certain x_i. Ensuite on réécrit en extrayant le $\frac{1}{2}$, et pour le dénominateur on a pour chacun de ses facteurs $|x_i - r_j| \leq |x_i| + |r_j| \leq |x_j| + R$ donc il est majoré par $(|x_i| + R)^b$, ce qui minore le module de $|f(x_i)|$. □

On a quelques variantes de ce résultat. En prenant les racines dans $\mathbb{R}$ au lieu de les prendre dans $\mathbb{C}$ la borne inférieure est largement améliorable car les distances entre les x_i, x_j repassent beaucoup par les même segments. De même si le polynôme P est dans $\mathbb{R}[X]$, si un complexe est racine de P son conjugué l'est aussi ce qui est une restriction forte et agrandit probablement la borne. La borne de la démonstration peut aussi être améliorée tout court car les cercles de rayon D et de centre x_i ne se touchent pas, il y a de l'espace qui pourrait être utilisé dans la démonstration. On peut penser à l'utilisation d'un diagramme de Voronoï et de ses généralisations en plus grande dimension pour voir quelles distances supplémentaires sont forcées.

On est maintenant en mesure d'améliorer la proposition 8 en affaiblissant l'hypothèse de convergence.

Proposition 9 (Non-approximabilité de la fonction créneau.)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fractions rationnelles de degré de numérateur a, de degré de dénominateur b, et $m = 2(a+b)+1$ réels $x_1, ..., x_m$ tels que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_i) = 0$, alors f est la fraction nulle.*

Démonstration. Tout comme dans la proposition 8, on créée une sous-suite de (f_n) telle que les suites de racines du numérateur et du dénominateur de la fraction sont soit bornées soit tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$. On a alors un équivalent pour le produit/quotient des $(x - r)$ pour r qui tend vers $\pm\infty$ qui ne dépend pas de x, qu'on combine avec la suite α_n du coefficient dominant, et ce groupe de facteurs tend vers une limite l (qui peut potentiellement valoir 0 et $\pm\infty$). On note alors R la borne du module des racines du dénominateur pour la partie bornée. La formule du corollaire 9 est indépendante des racines du numérateur des termes de notre suite. Si on note a' le nombre de racines du numérateur dans la partie bornée et pareillement b' pour le dénominateur, on a par le lemme 4 qu'il existe x_i tel que (indépendamment de n)

$$|f_n(x_i)| \geq |l| \frac{\min\{|x_i - x_j| : i \neq j\}^{a'}}{2^{a'}(|x_i| + R)^{b'}}.$$

Or $f_n(x_i)$ converge vers 0 par hypothèse, et le facteur de droite est non-nul, donc on en déduit que $l = 0$ ce qui montre que toute la suite f_n converge vers la fraction nulle. □

Fixons $m = 2(a + b) + 1$ réels distincts de 0 et de 1 et tels que chacun des deux ensembles $]0, 1[$ et $]-\infty, 0[\bigcup]1, +\infty[$ en contienne au moins un. On déduit de la proposition 9 qu'aucune suite de fractions rationnelles dont le numérateur est de degré a et le dénominateur de degré b ne peut converger simplement 3 vers la fonction créneau en chacun de ces points.

Voici une version quantitative de cette propriété.

Proposition 10 (Non-approximabilité quantitative de la fonction créneau.)**.** *Fixons $m = 2(a+b)+1$ réels $x_1, \ldots, x_m$ distincts de 0 et de 1 et tels que chacun des deux ensembles $]0,1[$ et $]-\infty, 0[\bigcup]1, +\infty[$ en contienne au moins un. Soit f une fraction rationnelle de numérateur P (unitaire), qui a pour degré a pour coefficients $(c_i)_{i\in[\![0,a]\!]}$, et de dénominateur Q (et de coefficients $(d_i)_{i\in[\![0,b]\!]}$ de degré b. On note e la fonction créneau. Alors il existe $i \in [\![1,m]\!]$ tel que*

$$|f(x_i) - g(x_i)| \geq \min(\left|\frac{c_k}{d_k} - 1\right|, \left|\frac{c_0}{d_0}\right|)\frac{\min\{|x_i - x_j| : i \neq j\}^a}{2^a(|x_i| + R)^b}.$$

Avec $k = \max\{i : p_i - d_i \neq 0\}$.

Démonstration. Par le principe des tiroirs, un des deux ensembles $]0,1[$ et $]-\infty, 0[\bigcup]1, +\infty[$ contient $\left\lfloor \frac{2(a+b)+1}{2} \right\rfloor = a+b+1$ points parmi les x_i. Soient $x'_1, x'_2, ..., x'_{a+b+1}$ ces points.

Si ils appartiennent à $]0,1[$, alors $\forall i, |f(x'_i) - g(x'_i)| = |f(x'_i) - 1|$ et $f - 1 = \frac{P-Q}{Q}$ est une fraction rationnelle. En prenant $k = \max\{i : c_i - d_i \neq 0\}$, le coefficient dominant de $P - Q$ est $c_k - d_k$ et celui de Q est d_k, donc le coefficient dominant de f est $\alpha' = \frac{c_k - d_k}{d_k} = \frac{c_k}{d_k} - 1$. Donc compte tenu du fait qu'il y a $a+b+1 \geq a'+b+1$ nombres dans cet intervalle, d'après le corollaire 9, il existe l (avec $x'_l = x_i$ pour un certain l) tel que :

$$|f(x'_l) - g(x'_l)| \geq |\alpha'| \frac{\min\left\{|x'_i - x'_j| : i \neq j\right\}^a}{2^a(|x'_l| + R)^b} \geq |\alpha'| \frac{\min\{|x_i - x_j| : i \neq j\}^a}{2^a(|x_i| + R)^b}$$

D'ailleurs vu que $|x'_l| = |x_i| < 1$, l'inégalité reste vraie avec le dénominateur $2^a(1 + R^n)$.

S'ils appartiennent à $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, alors $|f(x'_i) - g(x'_i)| = |f(x'_i)|$ et f est une fraction rationnelle, de coefficient dominant $\alpha = \frac{c_0}{d_0}$. Donc compte tenu du fait qu'il y a $a+b+1$ nombres dans cet ensemble, d'après le corollaire 9, il existe l (et i tel que $x'_l = x_i$) tel que :

$$|f(x'_l) - g(x'_l)| \geq |\alpha| \frac{\min\left\{|x'_i - x'_j| : i \neq j\right\}^a}{2^a(|x'_l| + R)^b} \geq |\alpha| \frac{\min\{|x_i - x_j| : i \neq j\}^a}{2^a(|x_i| + R)^b}.$$

On remarque que les deux bornes inférieures obtenues dans les deux cas restes vraies (par simple transitivité) en remplaçant α et α' par $\min(|\alpha|, |\alpha'|) = \min(|1 - \frac{c_k}{d_k}|, \frac{c_0}{d_0}|)$, ce qui conclut.

□

5 Autres questionnements

Cette section traite de questionnements découlant de précédent qu'on n'a pas traité juqsu'au bout. Il se peut que de nombreuses pistes données ici soient non-pertinentes.

5.1 Approximabilité des fonctions continues

Dans la section 3.2, on a démontré qu'on pouvait approximer des fonctions uniforméments continues par des fractions rationnelles (donc en particulier des fonctions continues sur un intervalle par le théorème de Heine). Mais que dire des fonctions qui ne sont pas forcément uniformément continues ? Cette question n'a pas été cherchée. Mais dans le cas des fonctions continues on peut se douter qu'on pourra simplement les approximer sur des segments de R, et après à voir à quel point l'approximation devient mauvaise à côté. Certaines fonctions ne sont probablement pas approximable sur $\mathbb{R}$, comme la fonction exponentielle, au vu de ses limites qui ne sont pas cohérentes avec celles qu'on obtient avec les fractions rationnelles.

5.2 Optimalité de la solution

On sait que la fonction créneau n'est pas approximable par des fractions rationnelles de degré borné. L'exemple ci-dessus est-il "optimal" ? L'exemple ne donne qu'une approximation pour les fractions rationnelles de degré $(1, 2n)$ et pas pour les autres, mais on peut se demander si on peut faire mieux ? Existe-t-il d'autres fractions rationnelles de degré $(1, 2n)$ qui approximent mieux la fonction créneau ?

Pour répondre à cette question il faut choisir comment on va mesurer cette approximation. Tout d'abord on remarque que la fonction créneau est "plate" sur 3 intervalles différents, il semble alors plus simple d'étudier l'approximation de la fonction nulle par des fractions rationnelles. Le cas est différent car sans discontinuité, mais on peut déjà essayer de voir à quel point une partie "plate" n'est pas approximable. Ensuite, il faut choisir un intervalle sur laquelle mesurer l'erreur. Si on a f une fraction rationnelle de degré au plus (a, b), la fonction $x \to f(x+s)$ (où s est un "shift" suffisament grand) aura intuitivement la même erreur mais sur une autre partie de la fonction, un choix judicieux semble alors $\mathbb{R}$. Mais alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ sera souvent infinie. Pour cela on décide de ne prendre que les fractions rationnelles de degré (a, b) avec $a < b \leq B$ (où B est notre borne sur le degré) de telle façon à ce que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Il faut aussi exclure les fractions rationnelles avec les pôles dans $\mathbb{R}$. On note enfin que si $b - a = 1$, l'intégrale est toujours infinie, on résout ce problème en prenant IEQ (indice d'erreur quadratique) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt$$

(pour $f \in \mathcal{F}'$ qui est l'ensemble des fonctions respectant les conditions ci-dessus), en effet $\int \frac{1}{x^\alpha}$ converge seulement si $\alpha > 1$.
Maintenant qu'on a un indice bien défini pour toute une classe de fonction, il faut exclure les cas triviaux. Si on a une suite (f_n) de fractions rationnelles telles que leur coefficient dominant α_n tend vers 0, la fraction tend vers la fonction nulle [pas tout à fait vrai], on demande donc que f soit unitaire. Aussi si les racines des dénominateurs des f_n ont un module non-borné, la suite peut trivialement tendre vers la fonction nulle. On demande alors à ce que les racines des dénominateurs des f_n ont un module borné de R.
On note $\mathcal{F}'_B(R)$ l'ensembles des fractions rationnelles qui respectent toutes les conditions ci-dessus et l'indice d'erreur IE : $\mathcal{F}' \to \mathbb{R}^+$ défini comme l'intégrale ci-dessus.

5.2.1 Calcul pour approximation de la fonction nulle

On cherche tout simplement $\min \mathrm{IE}$ en fonction de B et R.

On procède à une décomposition en éléments simples. Vu que le dénominateur n'a pas de racine réelle, on obtient seulement des éléments simples de seconde forme :

$$\frac{a_{i,m}x + b_{i,m}}{(x^2 + p_i x + q_i)^m}$$

On décompose :

$$\frac{a_{i,m}}{2}\frac{2x + p_i}{(x^2 + p_i x + q_i)^m} + \frac{b_{i,m} - \frac{1}{2}a_{i,m}p_i}{(x^2 + p_i x + q_i)^m}$$

On a deux cas, si $m \geq 2$ alors la primitive de $\frac{2x+p_i}{(x^2+p_ix+q_i)^m}$ étant $-\frac{1}{(1-m)(x^2+p_ix+q_i)^{m-1}}$, et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont 0, on peut alors l'ignorer. Sinon sa primitive est $\ln(x^2 + p_i x + q)$. Quant au second terme, en oubliant le coefficient, on peut le réécrire, avec $\Delta_i = 4p_i^2 - q_i > 0$ (car le dénominateur est irréductible) :

$$\frac{1}{\left((x + \frac{1}{2}p_i)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta_i}\right)^2\right)^m}$$

L'intégrale étant évaluée de $-\infty$ à $+\infty$, le changement de variable $X = x + \frac{1}{2}p_i$ ne change rien. Le nouveau changement de variable $X \leftarrow \frac{2X}{\sqrt{-\Delta_i}}$ nous ramène à évaluer :

$$\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta_i}}\right)^{2m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^m}dx$$

Où une rapide intégration par partie montre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^m}dx = \frac{2m-3}{2m-2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{m-1}}dx$$

Ce qui mène par itération à la formule (en prenant la convention $(-1)!! = 0!! = 1$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^m}dx = \frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!}\left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi\frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!}$$

En bref, si $m \geq 2$ on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_{i,m}x + b_{i,m}}{(x^2 + p_i x + q_i)^m} = (b_{i,m} - \frac{1}{2}a_{i,m}p_i)\pi\frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!}\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta_i}}\right)^{2m-1}$$

Et sinon, on s'est ramené à l'expression

$$\frac{a_{i,1}}{2}\ln(x^2 + p_i x + q_i) + \frac{(2b_{i,1} - a_{i,1}p_{i,1})\pi}{\sqrt{-\Delta_i}}$$

5.3 Approximation avec les primitives

Soit $\mathcal{F}_2$ l'ensemble des fractions rationnelles de degré au plus $(1,2)$, et $\mathcal{IF}_2$ l'ensemble de leurs primitives. On observe quelque chose d'étonnant : on sait que $\arctan ax = \int \frac{a}{(ax)^2+1}dx$ (primitive connue), ce qui signifie que la classe $\{x \to \arctan ax : a \in \mathbb{R}\}$ est incluse dans celle des primitives de fractions rationnelles. Or :

$$\lim_{a\to\infty} \arctan ax = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On calcule alors que, avec $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, la suite de fonctions dans $\mathcal{IF}_2^{\mathbb{N}}$

$$f_n(x) = \frac{\arctan(a_n x) - \arctan(a_n(x-1))}{\pi}$$

tend vers la fonction créneau.
Questions : On a démontré précédemment que l'ensemble des fractions rationnelles pour un degré borné était stable par limite ; par additivité de l'intégrale, on a l'impression que cela devrait rester vrai pour les primitives. Pourquoi ce n'est pas le cas ? Décrire l'ensemble des fonctions $\mathcal{IF}_2$? Même question pour son adhérence ? Mêmes questions pour $\mathcal{F}_2 + \mathcal{IF}_2$?

On a quelques éléments de réponses. Tout d'abord la proposition 8 nous explique que les fractions rationnelles de degré borné sont stables "par limite" à l'exception d'un nombre fini de points. En fait, si $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{a}{(ax)^2+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En effet, si $x \neq 0$, on a $\frac{a}{(ax)^2+1} \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$, donc ça tend bien vers 0. Mais si $x = 0$ alors $\frac{a}{(ax)^2+1} = a$ et tend bien vers $+\infty$. On remarque bien que la fonction tend vers la fraction rationnelle $\frac{0}{1}$, sauf en le point $x = 0$. On a en fait le théorème suivant plus général :

Théorème 5. *Soit $f = \frac{P}{Q}$ (avec P non-nul) une fraction rationnelle de degré a au numérateur, b au dénominateur, et de racines distinctes au dénominateur $(q_i)_{i\in[\![1,b]\!]}$. Soit une suite $(a_i)_{i\in[\![1,b]\!]}$ à b éléments dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fractions rationnelles de degré de numérateur $a+b$ et de degré de dénominateur $2b$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{q_i : i \in [\![1,b]\!]\}, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\forall i, \lim_{n\to+\infty} f_n(q_i) = a_i$.*

Démonstration. On va trouver une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fractions rationnelles (de degré de numérateur b et de dénominateur $2b$) telles que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{q_i : i\in[\![1,b]\!]\}, \lim_{x\to\infty} g_n(x) = \frac{1}{Q(x)}$ et $\forall i, \lim_{x\to\infty} g_n(q_i) = a_i$, ce qui nous permettra de conclure en prenant $f_n = Pg_n$. Pour cela on prend

$$g_n = \frac{(x-p_{1,n})(x-p_{2,n})...(x-p_{b,n})}{(x-q_{1,n})^2(x-q_{2,n})^2...(x-q_{b,n})^2}$$

Avec l'idée que $\forall i, \lim_{n\to+\infty} p_{i,n} = \lim_{n\to+\infty} q_{i,n} = q_i$ et donc que $\forall x \in \backslash\mathbb{R}\setminus\{q_i : i \in [\![1,b]\!]\}, g_n(x) = \frac{Q(x)}{Q(x)^2} = \frac{1}{Q(x)}$. Il faut maintenant choisir les bonnes "vitesses de convergence" et expliciter les suites pour avoir les bonnes valeurs au niveau des singularités. On notera Q_i le polynôme $Q_i = \frac{Q}{x-q_i}$, de telle façon à ce que $Q_i(q_i) \neq 0$, donc que $\frac{1}{Q_i(q_i)}$ soit bien défini (les racines étant distinctes). On étudie alors ce qui se passe quand $x = q_i$.

$$g_n(q_i) = \frac{(q_i-p_{1,n})(q_i-p_{2,n})...(q_i-p_{b,n})}{(q_i-q_{1,n})^2(q_i-q_{2,n})^2...(q_i-q_{b,n})^2} = \frac{q_i-p_{i,n}}{(q_i-q_{i,n})^2}\frac{\prod_{k=1,k\neq i}^{b}(q_i-p_{k,n})}{\left(\prod_{k=1,k\neq i}^{b}(q_i-q_{k,n})\right)^2}$$

En particulier par produit des des limites on a :

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(q_i) = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{q_i-p_{i,n}}{(q_i-q_{i,n})^2}\right)\frac{Q_i(q_i)}{Q_i(q_i)^2} = \frac{1}{Q_i(q_i)}\lim_{n\to+\infty}\frac{q_i-p_{i,n}}{(q_i-q_{i,n})^2}$$

C'est-à-dire qu'il suffit que

$$a_iQ_i(q_i) = \lim_{n\to+\infty}\frac{q_i-p_{i,n}}{(q_i-q_{i,n})^2}$$

Si a_i est un réel on peut obtenir cette limite. Pour ça on pose $p_{i,n} = q_i - \frac{a_iQ_i(q_i)}{n^2}$ et $q_{i,n} = q_i - \frac{1}{n}$. On a bien $\lim_{n\to+\infty} p_{i,n} = \lim_{n\to+\infty} q_{i,n} = q_i$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{q_i-p_{i,n}}{(q_i-q_{i,n})^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{q_i-\left(q_i-\frac{a_iQ_i(q_i)}{n^2}\right)}{\left(q_i-\left(q_i-\frac{1}{n}\right)\right)^2} = \frac{\frac{a_iQ_i(q_i)}{n^2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = a_iQ_i(q_i)$$

En particulier, la limite du terme de gauche est bien $a_iQ_i(q_i)$. Pour le cas où $a_i = +\infty$, on peut prendre $p_{i,n} = q_i - \frac{1}{n}$ et $q_{i,n} = q_i - \frac{1}{n}$ par exemple, on aura alors $\frac{q_i - p_{i,n}}{(q_i - q_{i,n})^2} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n$ qui tend bien vers $+\infty = +\infty Q_i(q_i)$, et pour $a_i = -\infty$ la même mais avec $q_{i,n} = q_i + \frac{1}{n}$, le quotient fera $-n$. En fait on remarque que toutes les limites précédentes dans la démonstration sont bien vérifiées ; on vérifie bien l'énoncé avec cette construction des $(p_{i,n})_{n\in\mathbb{N}*}$ et des $(q_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ce qui conclut ! $\square$

Quelques notes sur ce théorème.
Note 1 : la démonstration ci-dessus n'est pas tout à fait correcte car g_n n'est pas bien défini pour tout x (les racines au dénominateur empêche ça), mais on peut aisément voir qu'on peut prendre la limite à partir d'un certain rang N où ce sera bien défini et on sera bon (on a le même problème dans la section 4).
Note 2 : pour le cas où Q peut avoir des racines multiples, la démonstration est probablement assez aisément apdatable, il suffit de les grouper en terme de la forme $(x - p_{i,b'})^\alpha$ (où b' est le degré compté sans les multiplicités), poser $Q_i = \frac{Q}{(x-q_i)^\alpha}$, et contrôler un peu différemment le quotient selon α.

On peut en fait aller un peu plus loin comme le théorème 5.3. Comme on a vu la suite $l_n(x) = \frac{n}{(nx)^2+1}$ de fractions rationnelles tend vers 0 partout sauf en $x = 0$ où elle tend vers $+\infty$. On peut aussi considérer la suite $m_n(x) = \frac{1}{(nx)^2+1}$ qui cette-fois-ci tend partout vers 0 sauf en $x = 0$ où elle tend vers 1. Ainsi en sommant des translations/agrandissements/réductions de l_n et m_n, on peut obtenir des suites de fractions rationnelles de degré borné qui tendent vers 0 partout sauf en un nombre fini de points où on choisit la valeur qu'ils doivent prendre à la limite (dont $+\infty$ et $-\infty$). On peut ensuite, si on le souhaite, ajouter cette suite à une suite de fractions rationnelles, et donc obtenir des discontinuités en d'autres points que seulement les singularités : on peut *toujours* contrôler la valeur d'un nombre de fini de points de la limite, et ce quelques soient ces points.

Mais quel est le rapport avec l'intégrale ? En fait, même si nous n'avons encore tout quantifier (donc le paragraphe suivant est explicatif et ne se veut pas rigoureux), le fait que $\frac{a}{(ax)^2+1}$ tende vers $+\infty$ nous montre qu'il y a graphiquement un "pic" en $x = 0$, dont la hauteur augmente probablement quand a augmente. En particulier si $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ est un intervalle autour de 0, [l'intégrale de $\frac{a}{(ax)^2+1}$ sur cet intervalle] quand a tend vers $+\infty$ va tendre vers une valeur, ici quelque chose d'un peu plus petit de π. En particulier quand on prend l'intégrale de $\frac{a}{(ax)^2+1}$ sur $\mathbb{R}$, en l'interprétant comme l'aire sous la courbe, au début l'aire sous la courbe est petite, puis le "pic" a une aire d'environ 1, et l'aire après étant proche de 0, on a une aire totale qui va valoir π une fois le pic passé, ce qui explique qu'on va bien obtenir une fonction qui vaut 0 pour $x < -\varepsilon$ et π pour $x > \varepsilon$, et quelque chose entre les deux en $x = 0$. En prenant la constante d'intégration $C = -\frac{\pi}{2}$ on arrive bel et bien à expliquer le phénomène. On peut ensuite probablement utiliser cette remarque et le théorème 5/les notes, pour répondre aux questions en quantifiant correctement les choses.

5.4 Autres et applications

On a plein d'autres questions à explorer. Comme les développements limités fournissent de très bonnes approximations, existe-t-il des fractions rationnelles qui en fournissent de meilleures dans un certains cas ? (On sait qu'il y a déjà des méthodes étudiées comme les approximants de Padé, mais on peut peut-être creuser un peu plus de notre côté.)

Une question importante qu'on n'a pas non plus beaucoup exploré est le cas où on demande que la dérivée soit bornée. Dans l'énoncé du sujet, on veut trouver un profil "smooth" pour la fonction créneau. Mais donc une très bonne approximation de la fonction créneau étant trop "sharp", il serait intéressant de définir la "smoothness" d'une fonction dérivable par le supremum de la valeur absolue de sa dérivée : $\sup\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. On peut alors étudier et tenter de quantifier l'impact d'une telle limitation sur les approximations de la fonction créneau, notamment au sens de l'IEA. Quelques remarques simples peuvent être faites pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ avec une borne probable qu'on peut conjecturer (en remplaçant les "murs" de la fonction créneau par des segments de smoothness α, ça donne une approximation sympatique). Mais on n'est pas allé plus loin.

Enfin pour conclure cet article, on note qu'il se pourrait qu'il y ait une application dans la vraie vie à nos recherches ! En informatique, on peut avoir besoin de calculer certaines fonctions qui sont définies par morceau. Notamment, dans les jeux-vidéos, on peut représenter des objets (comme des tables, des maisons, des personnes, des baguettes magiques, des armes...) avec des polyèdres à faces triangulaires, qui ressemblent donc à des fonctions définies par morceau (on peut sûrement se ramener à ça). En particulier pour un niveau de graphisme il y a un grand nombre de telles faces. Pour les afficher, il faut donc probablement un grand nombre de if/else statements. Comme nous l'a fait remarqué un auditeur durant notre conférence du congrés MATh.en.JEANS, ces if/else statements sont difficiles à gérer et prennent en général beaucoup plus de temps à être exécutés que des opérations d'addition et multiplication. D'où l'utilité d'approximer des fonctions définies par morceau par des polynômes ou des fractions rationnelles ! (Et de savoir quantifier à quelles point ces approximations peuvent être bonnes en chaque point.)

Seulement ce doit être relativisé car les approximations données dans cet article, bien qu'effectives, semblent assez inefficaces et leur portée semble plutôt théorique. Nous avons peu exploré les potentielles applications (différence d'efficacité de calcul de ces fonctions) de nos recherches.

6 Conclusion et remerciements

Au final, nous avons bien identifié une bonne approximation de la fonction créneau. Nous avons donné une définition qui semble satisfaisante de la notion d'approximation, en expliquant que cela dépend d'une mesure appelé l'indice d'approximation, dont on a étudié certains cas pour démontrer des approximabilités. En particulier on a trouvé que les fractions rationnelles de degré borné n'approximaient pas la fonction créneau même dans un sens fort d'aire sous la courbe, mais que c'était par contre le cas quand le degré n'était pas borné, sauf pour le cas d'une approximation où les fonctions convergent uniformément. Cela nous a permis de généraliser : on a une façon effective d'approximer certaines fonctions continues par des fractions rationnelles, ce qui permet d'aller plus loin que la fonction créneau. Pour une approximation quelconque de la fonction créneau, on a un peu mesuré à quel point elle devait être mauvaise : dans le cas d'un degré non-borné, on a un supremum de l'erreur en chaque point qui va être d'au moins $\frac{1}{2}$ (lié à la non-continuité), et dans le cas du degré borné, on peut montrer que pour un ensemble petit de points E, au moins un des points sera mal approximé par une quantité proportionnelle à la distance minimale entre les points de E et inversement proportionnelle à l'éloignement maximal entre ces points à la puissance du degré du dénominateur de la fraction rationnelle. En dehors de l'approximation canonique pour laquelle on peut sûrement étudier l'erreur au sens de l'aire sous la courbe, on n'a pas pu quantifier l'erreur minimale pour une approximation quelconque de degré borné en ce même sens : il reste des recherches à faire. Quant au fait que les primitives de fractions rationnelles de degré borné peuvent quant à elles approximer la fonction créneau, on l'explique (mais pas totalement) grâce à une étude des défauts d'approximation en un nombre fini de points des fractions rationnelles, qui provoquent des discontinuités. Enfin, des pistes sont données, mais le présent article ne répond pas au compromis d'une approximation lisse de la fonction créneau. En outre le sujet de l'approximation de fonctions semble riche et complexe, et le cas particulier des fractions rationnelles nous apprend que l'on peut approximer plus de fonctions (notamment celles avec pour limites 0 en $\pm\infty$, ce qui a un avantage par rapport aux polynômes, voir théorème 2), mais les approximations sont difficiles à quantifier, et vérifier l'optimalité des approximations est complexe, ceci étant dit l'article semble donné un panorama suffisant pour expliquer dans de nombreux cas l'existence ou la non-existence d'approximations.

Nous tenons à remercier tout d'abord tous ceux ayant participer au projet (en introduction 1). Les relecteurs/correcteurs : Adrien Israël, Noé Fisher mais aussi (surtout) notre professeur et chercheur référent Pierre Pansu qui a corrigé beaucoup de choses. Merci à tous ceux ayant écouté nos recherches/fait des remarques incluant d'abord les autres membres de MATh.en.JEANS Paris-Saclay, puis quelques camarades de promotion des LDD1 IM/MP de la faculté, et tous ceux ayant écouté notre sujet durant le congrés MATh.en.JEANS Île-de-France 2023, notamment la personne ayant fait la remarque sur l'application en informatique. On remercie aussi tous ceux qui nous ont motivé pour ce projet de recherhe (notamment, pour Aurélien, sa famille). Merci aussi énormément au lecteur pour être arrivé jusqu'à la fin de ces très longues 24+ pages, si vous avez des questions/des propositions, ou si vous voulez contacter les auteurs, emailez aurelienperdriaud@gmail.com !