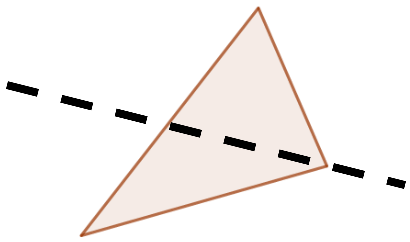
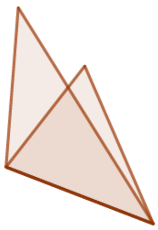
En un pli, comment plier un triangle afin d'obtenir une aire minimale de la partie non superposée ?

Sujet donné par Elise Goujard, Chercheuse à l'institut de mathématique de Bordeaux
Et traité par Karim Gobara, Bertille Gonzalez et Agathe Larrat, élève de 4ème du collège Sainte-Marie de Langon

I. Problématique

On plie un triangle en deux et on obtient un polygone.

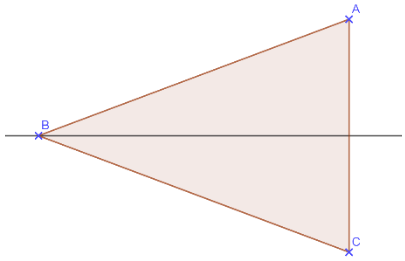




Notre sujet consiste à trouver une façon de plier un triangle quelconque afin que la partie non recouverte du polygone obtenu aie une aire minimale.

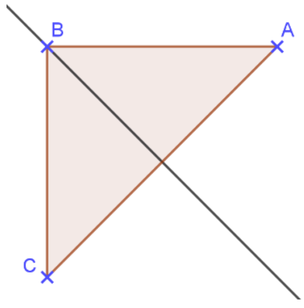
II. Premières intuitions

Au début, nous avons remarqué qu'avec un triangle isocèle, il suffit de le plier suivant son axe de symétrie. L'aire de la partie restant est alors égale à 0. En effet, un triangle isocèle admet un axe de symétrie qui est la bissectrice de l'angle formé par les deux côtés de même mesure.



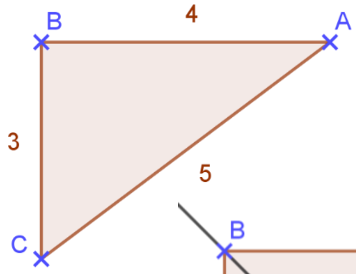
Nous nous sommes donc intéressés aux 3 bissectrices du triangle.

Dans un premier temps, nous avons pensé que plier suivant la bissectrice de l'angle le plus aigu d'un triangle permettrait de répondre à la question. Mais nous avons trouvé un contre-exemple : dans un triangle rectangle-isocèle, l'axe de symétrie est la bissectrice de l'angle droit.

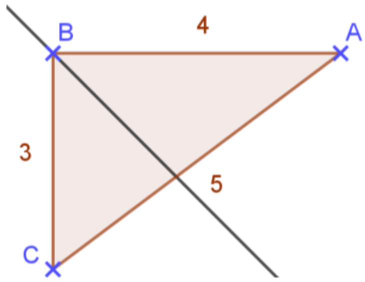


Nous avons donc poursuivi nos recherches et avons pensé à la bissectrice de l'angle formé par les deux côtés les plus proches en longueur. Nous avons fait des essais sur logiciel de géométrie dynamique Géogébra. Nous étions presque satisfaits mais malheureusement on ne savait pas si c'était vrai dans tous les cas ni comment faire, s'il y a le même écart entre deux côtés.

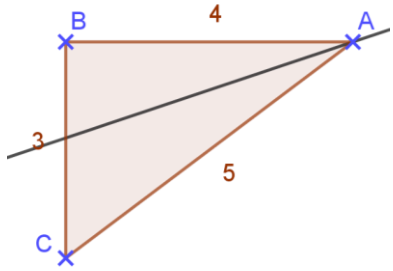
Par exemple, pour le triangle suivant



Faut-il le plier suivant cette bissectrice ?



Ou encore celle-là ?

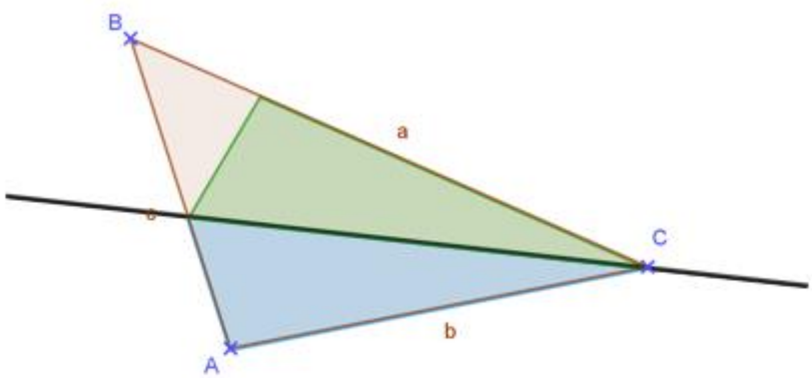


Nous avons donc cherché à déterminer une formule permettant de calculer l'aire restante en fonction de la bissectrice considérée.

III. Détermination de l'expression de l'aire restante minimale

Dans la suite de cet article, on va considérer un triangle ABC quelconque tel que AB = c, AC = b et BC = a et avec a ≥ b ≥ c

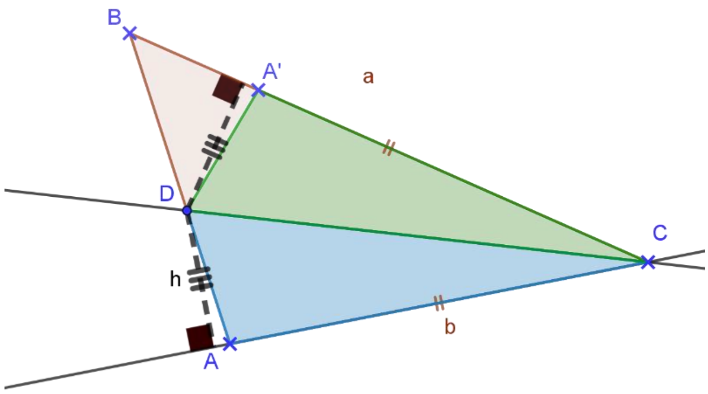
On considère la bissectrice de l'angle ayant pour côtés les deux plus grands.



Soit D le point d'intersection de cette bissectrice avec le côté [AB].
Soit A' le symétrique du point A par rapport à cet axe de symétrie.

Soit h la hauteur des triangles ADC et DA'C (puisque ces triangles sont symétriques, ils possèdent des hauteurs de longueur égale).

On obtient la figure suivante :



L'aire de la partie restante est donc celle du triangle BDA' qui s'exprime par

$$A_{DBA'} = \frac{BA' \times h}{2} \qquad \text{D' où,} \qquad A_{DBA'} = \frac{(a-b) \times h}{2}$$

Il nous reste donc à rechercher une expression de la hauteur h.

Soit A_t l'aire du triangle initial ABC.

On a : $A_t = A_{DAC} + A_{DBC}$

$$A_t = \frac{AC \times h}{2} + \frac{BC \times h}{2}$$

$$A_t = \frac{b \times h}{2} + \frac{a \times h}{2}$$

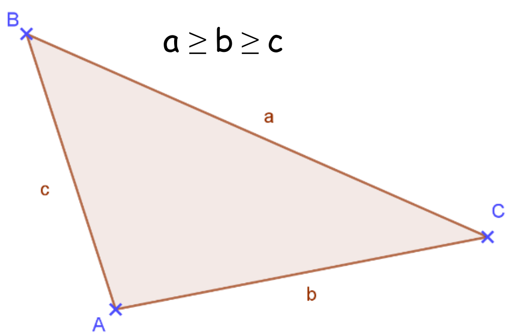
$$A_t = \frac{(a+b) \times h}{2}$$

Ainsi, on obtient la hauteur h en fonction de l'aire du triangle ABC : $h = \frac{2 \times A_t}{a+b}$

De plus, on a vu que $A_{DBA'} = \frac{(a-b) \times h}{2}$

Par conséquent, en remplaçant h par sa valeur, on obtient : $A_{DBA'} = \frac{a-b}{a+b} \times A_t$

Récapitulons,



L'expression de l'aire restante est fonction de la bissectrice envisagée :

Si on considère la bissectrice mettant en jeu les longueurs a et b,

on a : $A_{restante} = \frac{a-b}{a+b} \times A_t$

Si on considère la bissectrice mettant en jeu les longueurs b et c,

on a : $A_{restante} = \frac{b-c}{b+c} \times A_t$

Si on considère la bissectrice mettant en jeu les longueurs a et c,

on a : $A_{restante} = \frac{a-c}{a+c} \times A_t$

Si on compare les valeurs des coefficients multipliant l'aire du triangle ABC, cela permet de choisir la bissectrice offrant une aire restante minimale.

Effectuer ces calculs nous paraît un peu fastidieux à effectuer de tête. Nous avons donc recherché un critère plus simple pouvant nous aider à choisir le meilleur pli.

IV. Choix de la bissectrice : recherche d'un critère plus simple

On désire donc de comparer les coefficients suivants : $\dfrac{a-b}{a+b}$, $\dfrac{b-c}{b+c}$ et $\dfrac{a-c}{a+c}$
(avec $a \geq b \geq c$)

1) On commence par $\dfrac{a-b}{a+b}$ et $\dfrac{a-c}{a+c}$.

Comme $a \geq b \geq c$, alors $\left.\begin{matrix} a-c \geq a-b \\ a+b \geq a+c \end{matrix}\right\}$ d'où $\frac{a-c}{a+c} \geq \frac{a-b}{a+b}$
(car quand on augmente la valeur du diviseur, la valeur du quotient diminue).

2) On compare maintenant $\dfrac{b-c}{b+c}$ et $\dfrac{a-c}{a+c}$.

On va s'intéresser au signe de la différence :

$$\frac{a-c}{a+c}-\frac{b-c}{b+c}=\frac{(a-c)(b+c)}{(a+c)(b+c)}-\frac{(b-c)(a+c)}{(b+c)(a+c)}=\frac{ab+ac-cb-c^2-ab-bc+ac+c^2}{(a+c)(b+c)}$$

$$\frac{a-c}{a+c}-\frac{b-c}{b+c}=\frac{2ac-2bc}{(a+c)(b+c)}=\frac{2c(a-b)}{(a+c)(b+c)}$$

Donc la différence est du même signe que $a-b$, or $a \geq b$
Donc $a-b \geq 0$ d'où $\frac{a-c}{a+c} \geq \frac{a-b}{a+b}$

3) On compare enfin $\dfrac{a-b}{a+b}$ et $\dfrac{b-c}{b+c}$.

Nous allons procéder de la même manière.

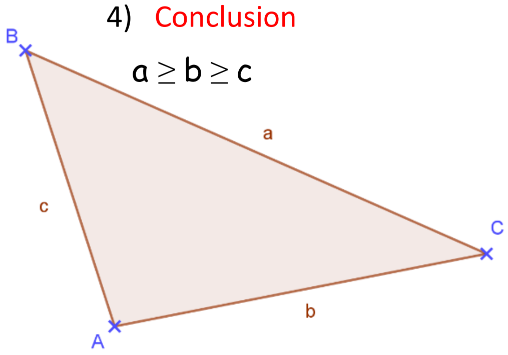
$$\frac{a-b}{a+b}-\frac{b-c}{b+c}=\frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}-\frac{(b-c)(a+b)}{(b+c)(a+b)}=\frac{ab+ac-b^2-bc-ba-b^2+ca+cb}{(a+c)(a+b)}$$

$$\frac{a-c}{a+c}-\frac{b-c}{b+c}=\frac{2ac-2b^2}{(a+c)(b+c)}=\frac{2(ac-b^2)}{(a+c)(b+c)}$$

Cette expression est du même que $ac-b^2$

4) Conclusion

$a \geq b \geq c$



Dans tous les cas, on écartera la bissectrice mettant en jeu la plus petite et la plus grande des longueurs du triangle (ici, a et c)

Si $ac-b^2 \geq 0$ *alors* $\dfrac{a-b}{a+b} \geq \dfrac{b-c}{b+c}$

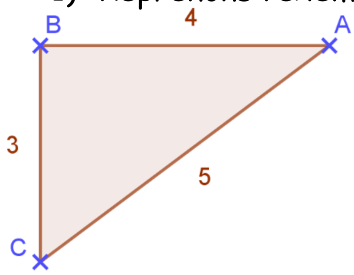
On choisira la bissectrice passant par le sommet commun des deux plus petites longueurs du triangle.

Si $ac-b^2 \leq 0$ *alors* $\dfrac{a-b}{a+b} \leq \dfrac{b-c}{b+c}$

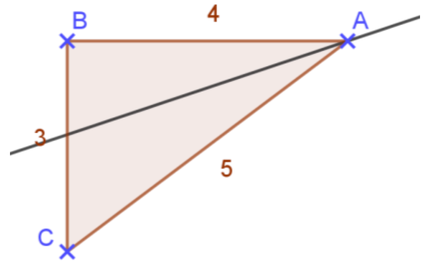
On choisira la bissectrice passant par le sommet commun des deux plus grandes longueurs du triangle.

V. Application

1) Reprenons l'exemple déjà cité :



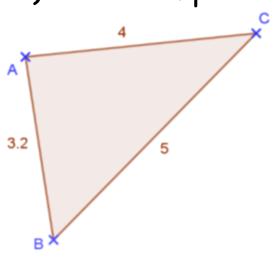
On choisira la bissectrice passant par le sommet commun des deux plus grandes longueurs du triangle.



$ac - b^2 = 5 \times 3 - 4^2 = 15 - 16 = -1$

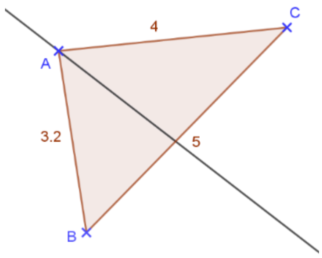
Donc $ac - b^2 \leq 0$

2) 2nd exemple :

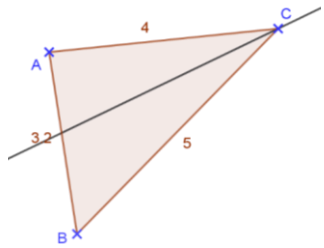


On calcule $ac - b^2 = 5 \times 3{,}2 - 4^2 = 16 - 16 = 0$

On a alors deux solutions :



ou



VI. Bilan

Dans un triangle de longueurs a, b et c (tel que $a \geq b \geq c$), pour obtenir l'aire minimale de la partie non superposée après un seul pliage, nous nous sommes intéressés aux bissectrices de ce triangle.

On a vu que l'on peut écarter celle comprise entre la plus petite longueur et la plus grande.

Puis en fonction d'un critère très simple, le signe de $ac - b^2$, on peut choisir la bissectrice permettant d'obtenir une surface restante minimale.

Intuitivement, nous pensons avoir résolu le problème. Mais il reste à prouver que tous les autres pliages sont moins performants que celui d'une bissectrice.