SUJETS MATH EN JEAN 2015-2016

Le problème du carreleur: Un carreleur doit carreler toutes les pièces d'une maison. Pour la première pièce, il dispose de dalles toutes identiques en forme de carrés. Pour la deuxième pièce les dalles sont des hexagones. Comment va-t-il les disposer pour recouvrir tout le sol (infiniment grand) de chaque pièce ?

Il pousse un cri de désespoir en découvrant que pour la troisième pièce on lui a prévu des dalles en forme de pentagones. Pourquoi ? Pouvez-vous l'aider à les disposer en recouvrant le maximum de surface ?

Petites sommes: A est un ensemble fini de nombre entiers. On s'intéresse à l'ensemble 'somme' $A + A$ qui est constitué de toutes les sommes $a + b$ où a et b sont pris dans A. On veut comparer les tailles respectives de A et $A + A$, que l'on note $|A|$ et $|A + A|$. Voilà pour l'échauffement quelques pistes faciles à explorer:

(1) Que se passe-t-il si on choisit les éléments de A au hasard ?
(2) Quelle est la taille minimale de $|A + A|$ (comme fonction de $|A|$) ?
(3) Si $|A + A|$ est de taille minimale que peut-on dire de A ?

Ensuite, on pourra s'intéresser à une variante qui consiste à remplacer l'ensemble de tous les entiers par l'intervalle $[0, 1, \ldots, N - 1]$ en remplaçant un entier par son reste dans la division par N. On peut se poser les mêmes questions que précédemment, et se demander pour quels entiers N on a les mêmes conclusions.

Substituons substituons: On s'intéresse aux mots finis ou infinis écrits sur un aphabet $\mathcal{A}$. Dans un premier temps on considère le cas le plus simple d'un alphabet à deux lettres $\mathcal{A} = \{a, b\}$. Voilà des exemples de mots:

abba , aa, , abababababababababa...

Une substitution consiste à remplacer dans un mot les lettres a, b par des mots fixés à l'avance. Par exemple la substitution $a \to ab$, $b \to a$ transforme les mots précédents de la façon suivante:

abba $\to$ abaaab

aa $\to$ abab

ababababab... $\to$ abaabaabaabaabaab...

On note σ une substitution; dans l'exemple précédent, $\sigma : a \to ab,\ b \to a$. Pour un mot m, on note $\sigma(m)$ le mot obtenu à partir de m par l'action de σ.

(1) Dans l'exemple précédent, pouvez-vous trouver un mot m tel que $\sigma(m) = m$ (on dit que m est un mot fixe de la substitution)? Ce mot est-il unique ?
(2) Choisissez vous-même une autre substitution. Et maintenant, existe-t-il m tel que $\sigma(m) = m$?
(3) En expérimentant sur plusieurs substitutions vous pourrez chercher un algorithme qui permet de construire un tel mot fixe (s'il existe).

Ensuite, vous pourrez chercher à caractériser les substitutions qui possèdent un mot fixe, puis passer à trois lettres, etc...