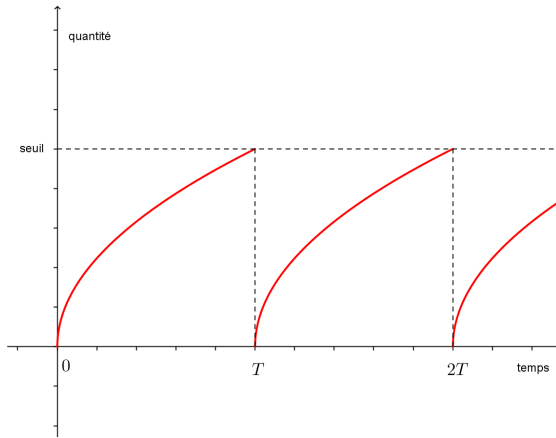


Lucioles.

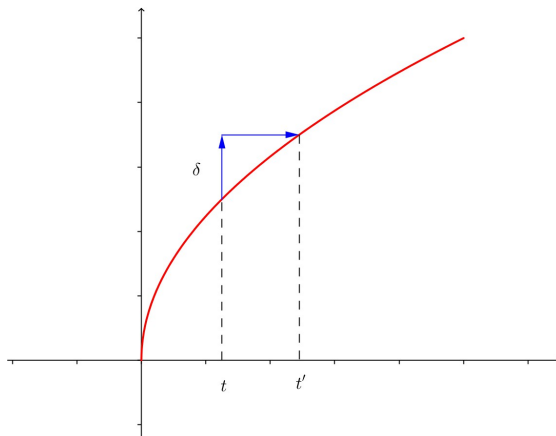
Les lucioles sont des insectes coléoptères qui ont la faculté de luminescence : elles peuvent émettre de la lumière ou des signaux lumineux.

Certaines espèces de lucioles mâles émettent la nuit des signaux lumineux périodiques pour attirer l'attention d'une femelle. La période T est de l'ordre d'une seconde. Ces signaux résultent d'un processus biochimique.

Pour une luciole isolée, la quantité d'un certain composé augmente au cours d'un cycle. Lorsque cette quantité atteint un certain seuil, un flash lumineux est émis, et un nouveau cycle débute (on repart de zéro).

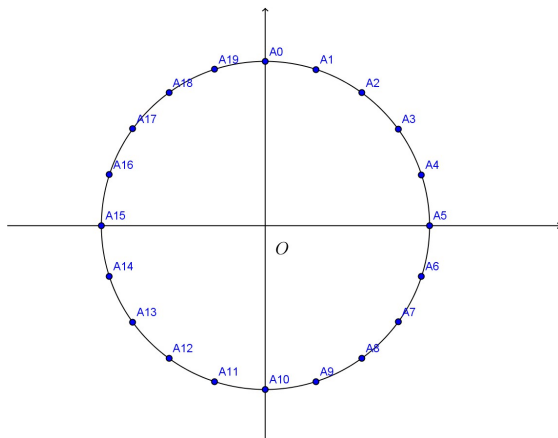


Pour les groupes de lucioles, un phénomène de synchronisation a été observé : les lucioles finissent, au bout d'un certain temps, par émettre leurs signaux en même temps. Ce phénomène semble indiquer que le cycle de chaque luciole est influencé par les flash lumineux qu'elle perçoit des autres lucioles. Pour expliquer ce phénomène, on a introduit la modélisation suivante : l'émission d'un signal lumineux par une luciole avance le cycle des autres, en entraînant l'augmentation du composé d'une quantité fixe δ . Pour les lucioles qui sont proches d'une fin de cycle en cet instant, cette augmentation instantanée peut conduire au dépassement du seuil, et donc à l'émission d'un flash. Ces lucioles ont alors un cycle synchronisé avec celui de la première luciole ayant émis un flash. Pour les autres, cela entraîne un raccourcissement du cycle d'une certaine durée, qui dépend de leur phase de cycle.



Un point important est que plus la phase d'une luciole est proche de la fin du cycle, plus l'avancée de cycle provoquée par le flash émis par une autre luciole est importante. Comment expliquez-vous cette propriété sur le schéma ci-dessus?

On va considérer le modèle simplifié suivant : les différentes phases d'un cycle sont représentées sur un cercle, gradué de 0 à $4n - 1$ dans le sens des aiguilles d'une montre. On a un groupe de p lucioles, chacune étant dans une phase de cycle correspondant à un point de la graduation. A chaque étape, toutes les lucioles avancent dans leur cycle d'une unité de graduation. Lorsqu'une des lucioles atteint la graduation 0, elle émet un flash. Ce flash provoque une avancée supplémentaire des autres lucioles, d'un nombre d'unité qui dépend de leur position sur le cercle : une unité pour les graduations de 1 à n , deux unités pour les graduations de $n + 1$ à $2n$, trois unités pour les graduations de $2n + 1$ à $3n$, quatre unités à partir de la graduation $3n + 1$.



Graduation pour $n = 5$

Question 1. Peut-on conjecturer, en regardant des exemples (avec 2, 3, 5 lucioles ou plus) qu'il y a toujours, avec ce modèle simplifié, synchronisation (c'est-à-dire qu'au bout d'un certain nombre d'étapes, toutes les lucioles ont la même phase)? Et au bout de combien d'étapes?

Question 2. Si la réponse à la première question est oui, essayer de donner une preuve de cette propriété de synchronisation. Si la réponse est non, essayer de trouver dans quels cas il n'y a pas synchronisation.

Question 3. Si, lorsqu'une luciole émet un flash, l'avancée supplémentaire des autres lucioles était indépendante de leur phase, que se passerait-il? Même question si l'avancée supplémentaire était plus grande en début de cycle et moins grande en fin de cycle.