

Sujet 1 : Nombres premiers et sommes de 2 carrés

On rappelle qu'un *nombre premier* est un entier $p \geq 2$ dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et p . Ce sujet propose de réfléchir à la question suivante : « comment reconnaître un nombre premier p pouvant s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers ? »

On propose procéder en suivant les étapes suivantes.

- (1) On remarque que $5 = 2^2 + 1^2$ est un nombre premier qui s'écrit comme somme de 2 carrés. Essayer d'écrire 13 comme somme de deux carrés. Peut-on écrire 3, 7, 11 comme somme de deux carrés ? Et 101 ?
- (2) Pour aller plus loin il nous faut des listes de nombres premiers à tester. On va décrire une méthode permettant de donner la liste des nombres premiers inférieurs à un nombre M , pourvu que M ne soit pas "trop grand".
 - (a) Expliquer pourquoi un nombre entier qui n'est pas premier admet au moins un diviseur ≥ 2 plus petit que sa racine carrée (autrement dit, si a est un nombre entier qui n'est pas premier alors on peut trouver un nombre entier d tel que d divise a et $d^2 \leq a$).
 - (b) On veut faire la liste des nombres premiers inférieurs à 100, en utilisant la question précédente : il suffit d'écrire tous les entiers de 2 à 100 et d'enlever tous les multiples des nombres premiers inférieurs à $10 = \sqrt{100}$.
- (3) Dans la liste, trouvée à la question précédente, des nombres premiers ≤ 100 , déterminer ceux qui s'écrivent comme somme de deux carrés et ceux qui ne peuvent pas être écrits de cette façon.
- (4) Quel est le point commun de tous les nombres premiers s'écrivant comme somme de deux carrés ? Quel est le point commun de tous les autres ?
- (5) Et si l'on pose maintenant la question non plus pour les seuls nombres premiers, mais pour tous les entiers positifs ? Comment reconnaître ceux qui sont sommes de deux carrés ?