

1 Des polygones sur une grille

Contexte / mise en bouche

On considère une grille formée de points régulièrement espacés. On appellera **points entiers** les points situés aux intersections de cette grille. On construit maintenant des polygones dont tous les sommets sont des points entiers. Pour chacun de ces polygones, on peut mesurer son aire, mais aussi compter certains points de la grille.

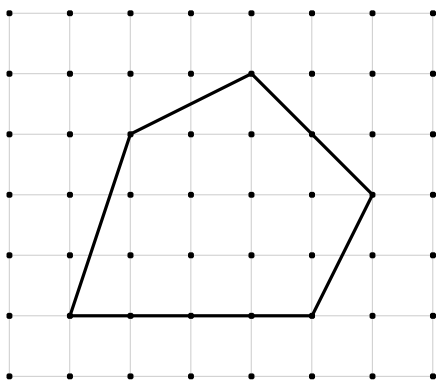
Existe-t-il un lien entre toutes ces quantités ?

Énoncé

Pour un polygone tracé sur la grille, on note :

- I le nombre de points entiers situés **strictement à l'intérieur** du polygone ;
- B le nombre de points entiers situés **sur le bord** du polygone ;
- A l'aire du polygone.

Par exemple :



Un exemple de polygone dont tous les sommets sont situés sur des points de la grille.

Questions à explorer

1. Commencez par construire plusieurs rectangles dont les sommets sont des points entiers. Pour chacun d'eux, calculez :

A , I , B .

Organisez vos résultats dans un tableau.

2. Faites la même expérience avec des triangles.

Observez-vous une relation entre A , I et B ? peut-on en déduire une formule donnant l'aire à partir de I et de B ?

3. Essayez ensuite avec des polygones plus compliqués.

La relation que vous avez trouvée semble-t-elle encore fonctionner ?

4. Deux polygones ayant le même nombre de points intérieurs et le même nombre de points sur leur bord ont-ils nécessairement la même aire ?

5. Peut-on prévoir l'aire d'un polygone simplement en comptant les points de la grille ?

6. Essayez de justifier la relation que vous avez observée.

Peut-on découper un polygone compliqué en figures plus simples pour lesquelles la relation est plus facile à comprendre ?

7. Que se passe-t-il si le polygone possède un trou ?

La relation trouvée précédemment fonctionne-t-elle encore ?

Question principale : Peut-on calculer l'aire d'un polygone tracé sur une grille simplement en comptant certains points de la grille ?