

Le constructeur d'autoroutes

Contexte

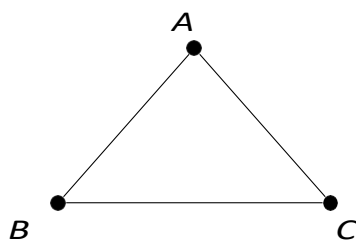
Plusieurs villes souhaitent construire des autoroutes pour être directement reliées entre elles. Elles font appel à un constructeur, mais celui-ci doit respecter une contrainte importante :

Deux autoroutes ne peuvent jamais se croiser.

Les routes peuvent être courbes et les villes peuvent être placées où l'on veut. On cherche seulement à savoir si toutes les liaisons demandées peuvent être réalisées sans croisement.

Énoncé

On représente chaque ville par un point et chaque autoroute reliant deux villes par un trait. Par exemple, trois villes peuvent toutes être reliées entre elles sans difficulté :



Mais que se passe-t-il lorsque le nombre de villes et de liaisons augmente ? Le constructeur peut-il accepter **n'importe quelle demande de réseau autoroutier**, ou existe-t-il des réseaux impossibles à construire sans croisement ?

Commencez avec un petit nombre de villes.

Peut-on relier toutes les villes deux à deux lorsque l'on a

3, 4, 5, 6

villes ?

1. Lorsqu'un dessin contient un croisement, cela signifie-t-il forcément que le réseau est impossible ? Peut-on déplacer les villes ou déformer les routes pour faire disparaître les croisements ?
2. Avec 5 villes, peut-on construire une autoroute entre **chaque paire de villes** sans aucun croisement ?
3. Imaginez maintenant deux groupes de trois villes :

A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3 .

Chaque ville du premier groupe doit être reliée à toutes les villes du second groupe. Peut-on construire toutes ces autoroutes sans croisement ?

4. Quel est le plus grand nombre d'autoroutes que l'on peut construire entre n villes tout en évitant les croisements ?
5. Peut-on trouver des propriétés qui permettent de savoir qu'un réseau est impossible à construire, sans avoir besoin d'essayer tous les dessins possibles ?
6. Que se passe-t-il si l'on autorise :
 - un pont permettant à deux autoroutes de se croiser ;
 - deux ponts ;
 - plusieurs niveaux d'autoroutes ?

Question principale : Comment savoir si un réseau de villes peut être dessiné sans qu'aucune autoroute ne se croise