Sujet pour Math.en.Jeans
2019/2020
Collège Gerard Philipe, Avignon
Collège Saint Exupery, Bédarrides

Andrea Venturelli

1 - Des arbres et des branches

Dans ce sujet on va parler d'arbres et de branches. On peut représenter un arbre comme dans la Figure 2. La ligne en pointillés représente le terrain. Les points noirs sont des noeuds, et les segments sont des branches. Un arbre est toujours fixé au terrain par une racine, c'est le noeud noté par la lettre R dans la Figure 2. Il y a toujours une seule branche qui part de la racine, c'est le tronc de l'arbre. Mise à part la racine, à partir de chaque noeud il peut y avoir plusieures branches (autant que l'on veut) qui se ramifient. Par contre deux branches qui partent de deux noeuds différents ne peuvent jamais se recroiser.

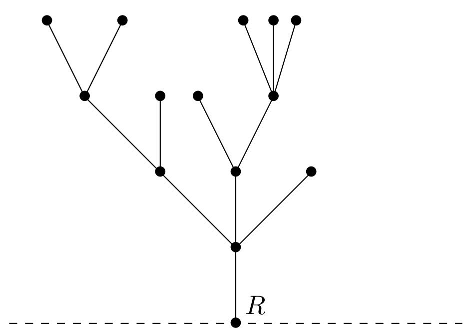


Fig. 2 : Un arbre.

Par exemple, le dessin de la Figure 3 ne représente pas un arbre, car on voit deux branches qui ont pris naissance en deux noeuds différentes, et qui se croisent dans le noeud noté par la lettre T.

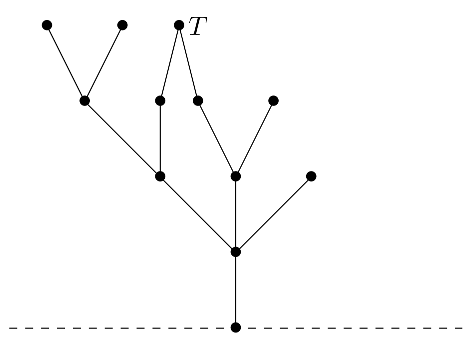


Fig. 3 : ceci n'est pas un arbre.

De la même manière, le dessin de la Figure 4 ne représente pas un arbre, car il y a deux troncs, et un arbre peut avoir seulement un tronc.

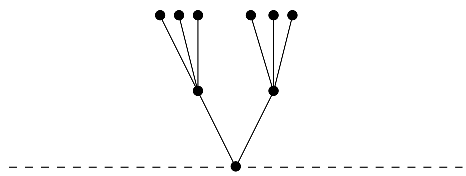


Fig. 4 : ceci non plus.

Maintenant on considère une forêt avec plusieurs arbres et deux bûcherons. Chaque bûcheron peut couper une branche d'un arbre. Quand on coupe une branche, tout ce qui est relié à l'arbre par cette branche tombe par terre. Par exemple, si on considère une forêt comme dans la Figure 5, si le premier bûcheron coupe la branche marquée par la lettre a, le résultat est montré dans la Figure 6.

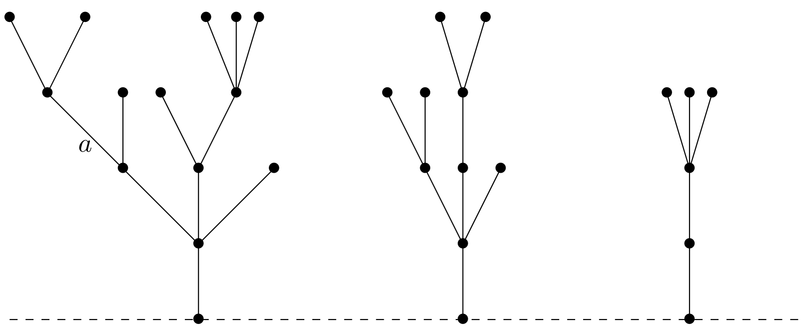


Fig. 5 : Une forêt avec trois arbres

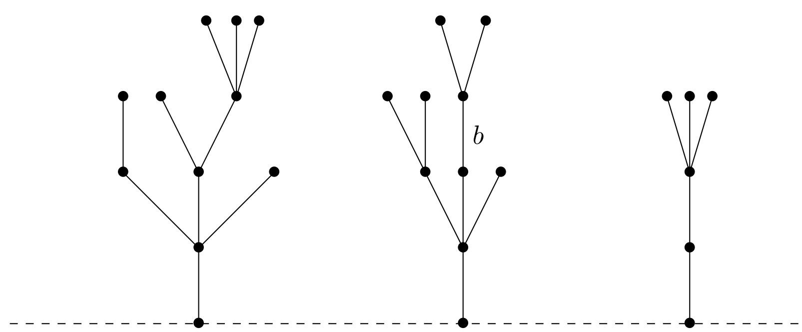


Fig. 6 : Ce qui reste de la forêt une fois que le premier bûcheron a coupé la branche a.

Une fois que le premier bûcheron a coupé une branche, c'est au tour du deuxième de couper. Si le deuxième bûcheron coupe la branche marquée par la lettre b dans la Figure 6, le résultat est montré dans la Figure 7.

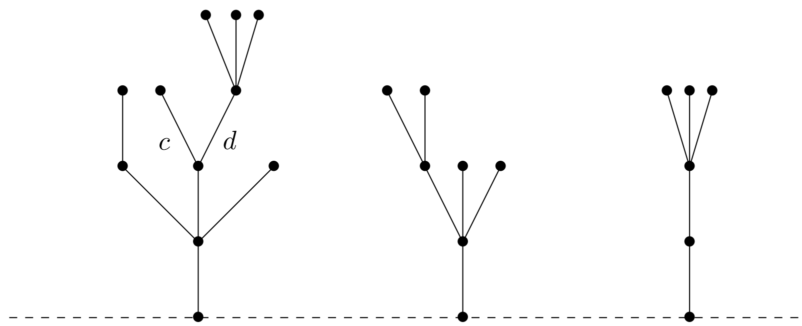


Fig. 7 : Ce qui reste une fois que le deuxième bûcheron a coupé la branche b.

Ensuite c'est encore le tour du premier de couper une branche, et ainsi de suite. On gagne le jeu si on coupe la dernière branche (nécessairement un tronc) et donc s'il ne reste plus rien. Je précise qu'un bûcheron peut couper la branche qu'il veut (même un tronc), mais seulement une branche à la fois. Par exemple, si c'est le tour du deuxième bûcheron, il ne peut pas couper d'un seul coup les branches marquées par les lettres c et d dans la Figure 7. Il doit choisir: soit il coupe la branche c, soit la d, mais pas les deux à la fois. Comme souvent dans ce type de jeux, la question est la suivante : existe-t-il une stratégie gagnante pour le premier bûcheron ? Ou alors la stratégie gagnante est pour le deuxième bûcheron ? Il faut aussi dire quelle est la stratégie qui permet à un des deux bûcherons de gagner. A priori la réponse dépend du nombre d'arbre dans la forêt, et aussi de la forme des arbres. Dans ce type de questions, il vaut toujours mieux commencer par les cas simples. Le cas le plus simple possible c'est quand la forêt est formée d'un seul arbre. Dans ce cas la réponse est vraiment très facile. Je suis sûr que vous avez déjà tous compris. S'il y a deux arbres, la question est déjà plus difficile. On va alors faire une hypothèse supplémentaire. On suppose que les deux arbres sont des *bambous*, c'est-à-dire des arbres comme dans la Figure 8.

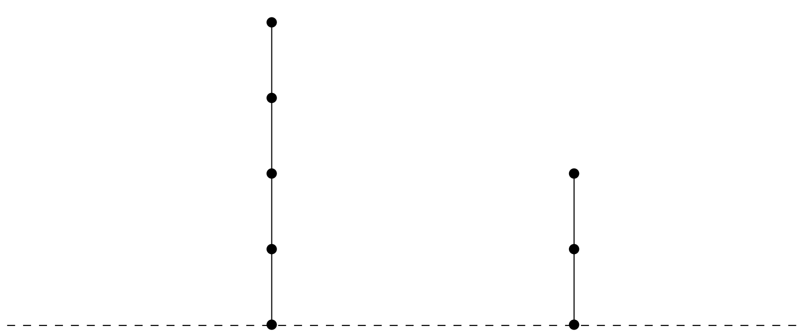


Fig. 8 : deux bambou

Un bambou est un arbre où à partir de chaque noeud (à l'exception du dernier) il y a une seule branche qui monte vers le haut. Quelle est la réponse à la question dans ce cas ? Est-ce qu'elle dépend du nombre de branches de chacun des deux bambous ? Cette question est encore assez facile, et j'imagine que vous allez trouver la réponse rapidement. On va donc passer au cas d'une forêt formée de trois arbres de bambou, puis à une forêt avec un nombre quelconque de bambous. Dans la Figure 9 on voit une forêt avec quatre arbres de bambou. La question est toujours la même : quand est-ce qu'il y a une stratégie gagnante pour le premier bûcheron, et quand est-ce qu'il y a une stratégie gagnante pour le deuxième ? Rappelons qu'une stratégie gagnante est une technique qui permet de gagner quoi que fasse l'autre bûcheron, on est donc censé savoir réagir (et gagner) indépendamment de son jeu.

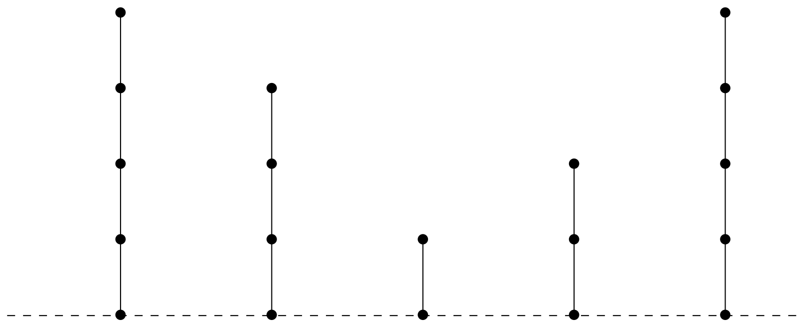


Fig. 9 : une forêt de bambou

2 - Le jeu des pousses

Pour jouer à ce jeu il faut d'abord deux joueurs, une feuille de papier et un stylo. Sur la feuille il y a déjà n points. Chaque joueur, à tour de rôle, trace une ligne entre deux points (éventuellement aussi entre un point et lui même) et rajoute un point sur la ligne qu'il a tracé. Dans ce jeu il y a deux contraintes :

- deux lignes ne peuvent jamais se croiser, on ne peut donc pas tracer une ligne qui en croise une autre.

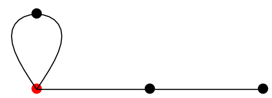
- un point ne peut être relié à plus de trois lignes, donc s'il y a déjà trois lignes partant d'une même point, on ne peut pas en tracer une autre qui part (ou qui arrive) dans ce même point.

Dès qu'un joueur ne peut plus tracer des lignes il a perdu, et donc l'autre joueur a gagné.

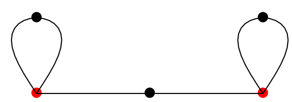
Afin de bien comprendre les règles du jeu, on peut faire un exemple de match avec $n = 2$ points du départ. Disons donc que les deux joueurs s'appelent Patrick et Quentin. Voici la situation initiale

Patrick joue en premier et il trace une ligne reliant le point de gauche à lui même, puis il rajoute un point sur cette ligne.

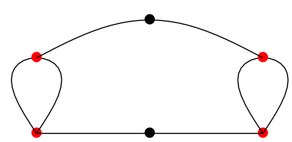
Quentin joue à son tour, et il trace une ligne reliant les deux points initiaux, puis il rajoute un point. On peut remarquer que maintenant il y a déjà trois lignes partant du point en bas à gauche, donc on ne peut plus en rajouter. On marquera donc ce point en couleur rouge.



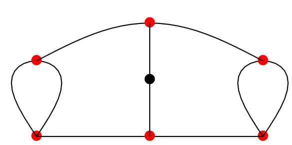
C'est à nouveau le tour de Patrick, qui decide de faire une boucle sur le point en bas à droite.



Quentin prends à nouveau le crayon et il trace une ligne reliant les deux points en haut.



Maintenant Patrick n'a plus qu'une seule possibilité : tracer une ligne entre les deux points du milieu.



Quentin ne peut plus rien faire, car il n'y a plus de points disponibles. Il a perdu au jeu, et c'est donc Patrick le gagnant.

Pour commencer je vous demande de jouer un peu pour vous familiariser avec les règles du jeu. Ensuite je vous pose la question suivante : est-ce qu'un match a toujours une fin ou bien il pourrait se poursuivre indéfiniment ? Pouvez-vous argumenter votre réponse ? Si vous pensez qu'un match se termine toujours, combien de lignes seront tracés au maximum avant que le match ne se termine ? Et combien de lignes seront tracés au minimum ? Bien entendu, il y a des fortes chances pour que la réponse dépend du nombre de points initial.

On peut se poser d'autres questions. Supposons par exemple de changer les règles du jeu en admettant jusqu'à quatre lignes reliés à chaque point. Que se passe-t-il maintenant ? Le jeu se termine-t-il toujours ou bien il peut se poursuivre indéfiniment ? Et que se passe-t-il si on garde la règle des trois lignes pour chaque point mais on permet aux lignes de se croiser ? Le jeu de termine-t-il toujours ? Le jeu a-t-il toujours un intérêt ?

Maintenant nous pouvons passer à une questions décidement plus difficile. Révenons au jeu avec les règles classiques (pas plus que trois lignes reliant chaque point, et les lignes ne peuvent jamais se croiser). Y a-t-il une stratégie gagnante pour le premier joueur ? Pour le second joueur ? Si oui quelle est cette stratégie ? Comme dans le sujet précédent, nous rappelons qu'une stratégie gagnante est une technique qui permet de gagner quoi que fasse l'autre joueur, on est donc censé savoir réagir (et gagner) indépendamment de son jeu. Je vous conseille de commencer à réfléchir à cette question en regardant le cas le plus simple possible, c'est-à-dire quand au départ il y a seulement un point. Ensuite on pourra passer à $n = 2$ points. Vous verrez que ce dernier cas est déjà assez difficile.