

Lemme de Sperner * * * * ☆

1ere partie

Dans un premier temps on considère un graphe rectiligne, par exemple :



On commence par colorier les deux extrémités à l'aide de deux couleurs différentes, par exemple **bleu** et **rouge** :



Ensuite on colorie les sommets à l'intérieur en **bleu** ou **rouge** comme on le souhaite, par exemple :

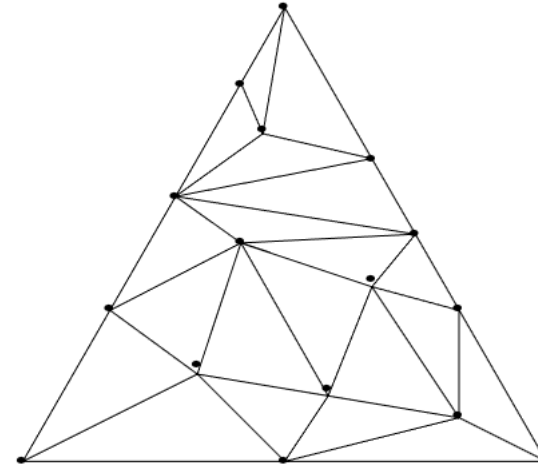


1. Commencer par réaliser cette même construction en changeant le nombre de sommet du graphe ainsi que le coloriage intérieur, faites-en au moins une dizaine.
2. À présent compter le nombre de changement de couleur dans chacune des configurations réalisées. Que remarque-t-on ?
3. Démontrer ce résultat.

2^{ème} partie

On considère à présent un graphe dont chaque face est un triangle et dont le contour est également un triangle.

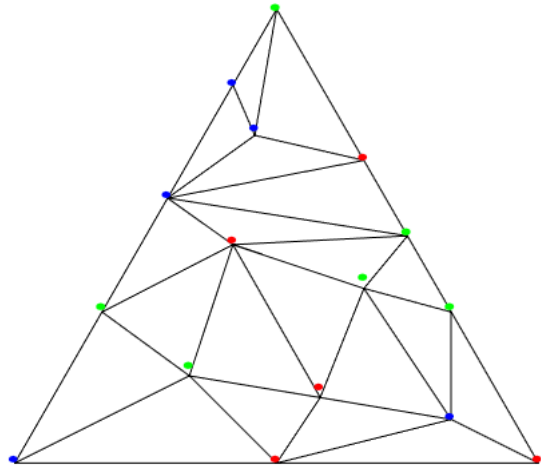
Exemple :



On va à présent colorier les sommets de ce graphe en utilisant un algorithme similaire au précédent :

- On commence par colorier les trois sommets du contour en trois couleurs distinctes, par exemple **bleu**, **rouge** et **vert**.
- Ensuite on procède comme précédemment pour colorier chacune des arêtes du contour, c'est-à-dire que l'on ne peut utiliser que les deux couleurs des extrémités de cette arête.
- Enfin, on utilise n'importe laquelle des 3 couleurs pour les sommets se trouvant à l'intérieur.

On obtient par exemple :



1. De nouveau effectuer plusieurs essais en changeant le nombre de sommets, la configuration du graphe ou encore le coloriage, mais en conservant la forme triangulaire des faces et du contour.
2. Compter le nombre de triangles tricolores, c'est-à-dire possédant les trois couleurs sur ses sommets, dans chacun de vos essais précédents. Que remarque-t-on ?
3. Démontrer ce résultat.

.