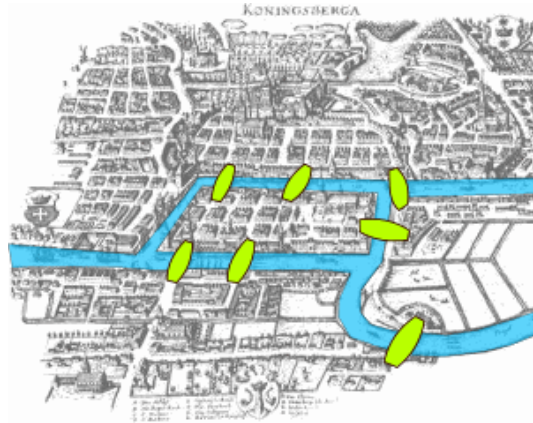


## Le problème des ponts de Königsberg ★ ★ ★ ★ ★

L'ancienne ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregelet reliées entre elles par un pont.

Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessous :



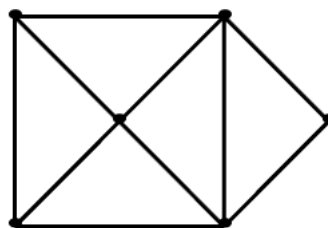
Plan de la ville de Königsberg

La question est de déterminer s'il existe une promenade qui, partant d'une des 4 régions de la ville permet de traverser une et une seule fois chacun des ponts.

1. Après quelques essais que remarque-t-on ?

**Définition.** Un graphe  $G$  est composé d'un ensemble  $V$  de sommets ainsi qu'un ensemble  $E$  d'arêtes reliant ces sommets.

Par exemple on peut considérer le graphe suivant :



2. Montrer qu'il est possible de tracer le graphe ci-dessus sans lever le crayon.
3. Compter le nombre d'arêtes partant des différents sommets de ce graphe.
4. Tracer un graphe représentant la situation de la ville de Königsberg. Compter alors le nombre d'arêtes partant des différents sommets de ce graphe.
5. Conjecturer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe admette un chemin passant une et une seule fois par chaque arête, puis la démontrer.