Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Les suites multiplicatives

Année 2024 – 2025

Chloé Choron et Morgane Brulin, élèves de classe de 3e

Établissement : Collège du Marquenterre, Rue
Enseignants : Marie Derycke, Julien Jacquet
Chercheurs : Ismaïl Razack, Fabien Durand, LAMFA Amiens

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

On part d'un nombre et on multiple entre eux les chiffres qui le composent. On obtient un nouveau nombre. Si ce nombre n'est pas écrit avec un seul chiffre, on recommence le processus : on multiplie les chiffres qui le composent, etc... et on s'arrête quand on tombe sur un nombre à un seul chiffre.

1.2. Résultats

Entre 0 et 1000, les nombres qui ont une telle suite la plus longue sont :

688 / 868 / 886
679 / 697 / 769 / 796 / 967 / 976
689 / 698 / 968 / 986 / 869 / 896

2. Méthode

Nous définissons le cardinal d'un nombre par le nombre d'étape qu'il faut pour obtenir un nombre à un chiffre.
Pour trouver le cardinal d'un nombre, il faut multiplier ce nombre jusqu'à ce qu'il ne contienne qu'un seul chiffre. Il faut ensuite compter le nombre de résultats pour obtenir le cardinal.

Exemple : Avec le nombre 36

On obtient ici une suite de 3. 36 a donc un cardinal de 3.

3. Les nombres de 0 à 99 :

3.1. Le tableau

Nous allons déterminer les cardinaux des nombres de 0 à 99. On peut commencer avec un tableau vierge que l'on coloriera au fur et à mesure.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

3.2. Cardinaux 1

Les nombres qui ont un cardinal égal à 1 sont les nombres écrits avec un seul chiffre. Ils ne se composent que d'un seul chiffre, on ne peut donc pas les multiplier entre eux.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

3.3. Cardinaux 2

Les nombres qui ont un cardinal égal à 2 sont :

- les nombres écrits avec un 0
- Les nombres écrites avec au moins un 1
- Certains nombres écrits avec un 3 ou au moins un 2.

Le plus petit est 10 et le plus grand 91.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Après avoir réalisé les tableaux précédents, nous avons remarqué qu'un axe de symétrie apparaissait…

3.4. Astuce de l'axe de symétrie

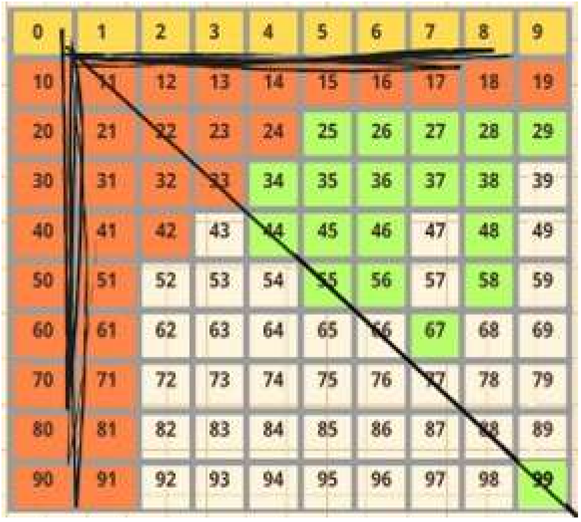
La symétrie ne s'effectue pas sur l'ensemble de ce tableau mais on peut voir qu'un axe de symétrie apparaît entre les nombres de 11 à 99. En effet, dans une multiplication nous pouvons échanger les facteurs de place, C'est la commutativité de la multiplication. Donc on peut ajouter un cadre en éliminant les nombres écrits avec un seul chiffre et les dizaines (la première ligne et la première colonne).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Grâce à l'axe de symétrie on peut se concentrer sur une seule partie du tableau et ajouter les couleurs de l'autre symétriquement à la fin de nos recherches.

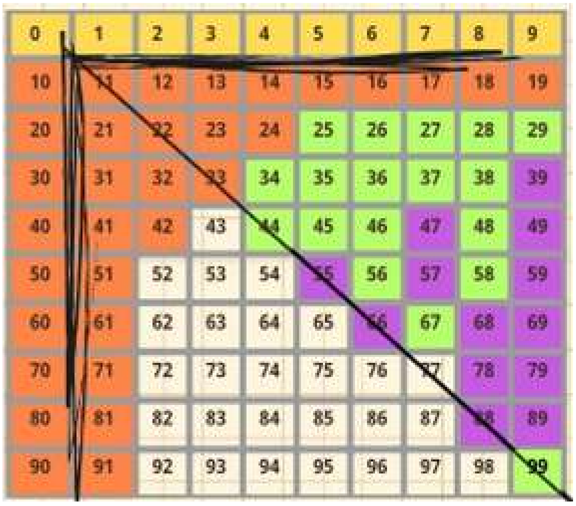
3.5. Cardinaux 3

Les nombre qui ont un cardinal égal à 3 ont été trouvés grâce à des essais. Le plus petit est 25 est le plus grand est 99.



3.6. Cardinaux 4

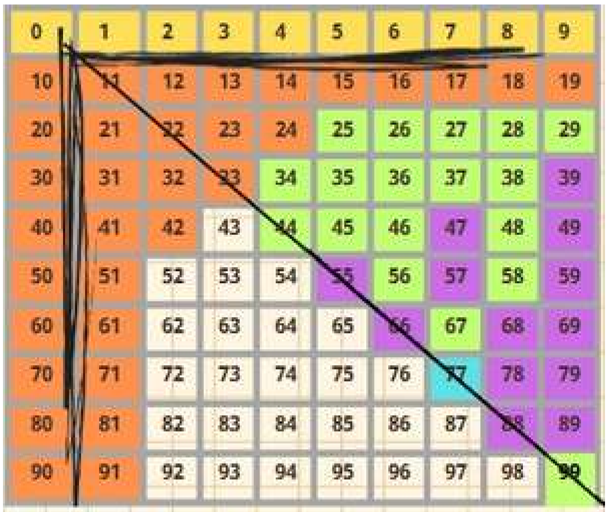
Les nombres qui ont un cardinal égal à 4 sont des nombres qui sont aussi composés de deux chiffres, le plus petit est 39, le plus grand 89.



3.7. Cardinaux 5

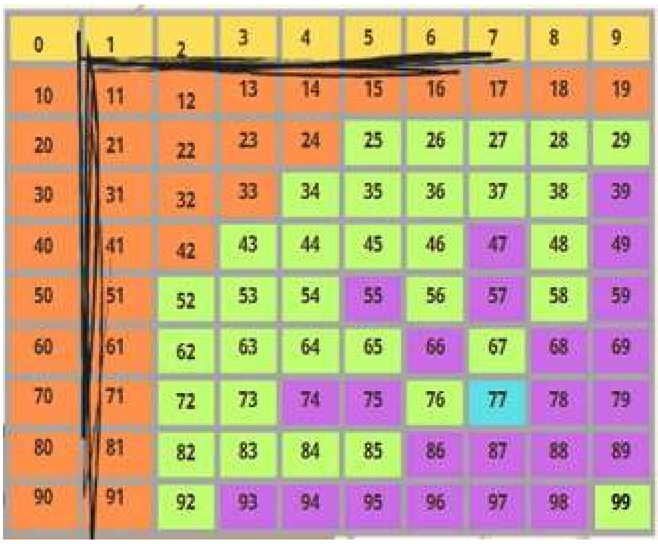
Le seul nombre qui a un cardinal égal à 5 que l'on a trouvé est 77 :

7x7 = 49   4x9 = 36   3x6 = 18   1x8 = 8



3.8. La symétrie du tableau

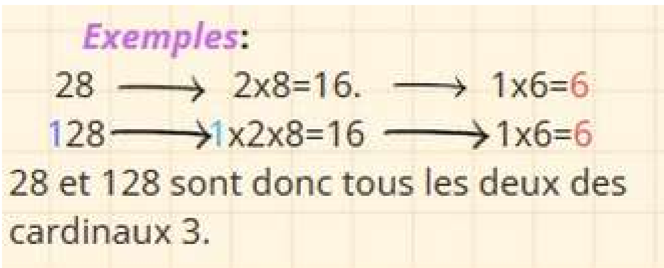
Nous pouvons alors remplir la partie basse du tableau :



Pour tous les tableaux que l'on observera (de 0 à 99 ; de 100 à 199 ; de 200 à 299 ; etc), il y aura un axe de symétrie.

4. Les nombres de 100 à 199

Pour le tableau de 100 à 199, on retrouve les mêmes couleurs que pour le tableau de 0 à 99. Parce que faire x1 en plus du produit déjà fait pour les nombres à deux chiffres (de 0 à 99) revient à ne rien faire de plus.



Exemples:

28 ⟶ 2x8=16. ⟶ 1x6=6

128 ⟶ 1x2x8=16 ⟶ 1x6=6

28 et 128 sont donc tous les deux des cardinaux 3.

111	112	113	114	115	116	117	118	119
121	122	123	124	125	126	127	128	129
131	132	133	134	135	136	137	138	139
141	142	143	144	145	146	147	148	149
151	152	153	154	155	156	157	158	159
161	162	163	164	165	166	167	168	169
171	172	173	174	175	176	177	178	179
181	182	183	184	185	186	187	188	189
191	192	193	194	195	196	197	198	199

5. Quel est le nombre de plus grand cardinal entre 0 et 1000 ?

Après avoir continué à faire des tableaux à la main jusqu'à 499, nous avons remarqué des ressemblances dans ses différents tableaux :

- Tous les nombres se composant d'un 0 sont des cardinaux de 2, donc ils ne nous intéressent pas car ils ne sont pas les plus grands cardinaux (les plus grands pour le moment sont les cardinaux de 5).

- Tous les nombres ayant le chiffre 1 ne nous intéressent pas non plus car on retombe sur la suite d'un nombre en 0 et 99.

Nous avons donc cherché pour tous les nombres jusqu'à 1000 et après avoir finalement retiré tous ceux avec un 1 il ne restait plus que 729 nombres à tester entre 0 et 1000. On a continué en enlevant tous les nombres avec un 0 il n'en restait plus que 512.

On peut calculer ces valeurs :

- Un nombre entre 0 et 999 est composé de trois chiffres. Pour chaque chiffre on a 10 choix, donc au total 10x10x10 = 1000 choix.

- On peut dénombrer les nombres qui ne possèdent pas de 1 : 9x9x9 = 729.

- Pas de 0, ni de 1 : 8x8x8 = 512 choix.

Après avoir retiré les nombres avec un 1 et un 0 nous avons trouvé une autre astuce : tous les nombres avec un 5 et un chiffre pair ramène à une dizaine donc à zéro.

Exemple avec 257 : 2x5x7 = 70 7x0 = 0

Nous avons donc enlevé tous les nombres avec un 5 et un chiffre pair, il en restait 72 comme ceux qui avaient aussi un 1 ou un 2 avaient déjà été retirés. donc après avoir retiré ces nombres il nous restait plus qu'à tester 440 nombres.

6. Commutativité

Dans une multiplication, nous pouvons changer les facteurs de place ; donc pour nos suites nous pouvons également changer les chiffres de place cela nous permet donc d'éliminer d'autre nombre qui comportent les mêmes chiffres mais dans un ordre différent.

Exemples : 123 ; 132 ; 213 ; 231 ; 312 ; 321 458 ; 485 ; 548 ; 584 ; 845 ; 854

Nous avons donc cherché parmi les 440 nombres qui nous restaient lesquels nous pouvions éliminer grâce à la commutativité. Après les avoir retirés, il ne nous restait seulement 83 nombres à tester individuellement. Mais grâce aux axes de symétrie et à la commutativité dans les tableaux, nous n'en avons plus que 26 à tester.

Parmis les 26 restants, ceux de plus grands cardinaux sont :

688 / 868 / 886
679 / 697 / 769 / 796 / 967 / 976
689 / 698 / 968 / 986 / 869 / 896

Ce sont ceux de cardinal 6.

7. Conclusion

Pour le tableau de 1000 à 1999 les couleurs seront les même que pour le tableau de 0 à 999 comme nous rajoutons juste des 1, ce qui ne change rien aux produits. Les plus grands cardinaux seront donc les mêmes mais avec un millier en plus. Nos prochaine suites commenceront à partir de 2000.