Les tours d'Hanoï

Florian BERARD, Corentin BRICE, Aymerick BROUARD, Charles DAVID-ADAM, Arthur DEFRAIN, Quentin DEGLISE, Simon FELTRIN, François GEORGES, Juliette LECLERC, Ludivine OZENNE, Corentin THOMAS, Charlotte VOSGIEN

Élèves de 4e et 3e , Collège Guillaume de Lamarche à Lamarche (88)
Enseignant : Perrine SCHAAL
Chercheur :André STEF

Les Tours d'Hanoï

Sujet

[Comment réussir à déplacer les disques des «tours de Hanoï» en respectant les] *Règles du jeu* :

- Nous disposons d'un plateau de 3 piliers. Nous les nommons 1, 2, 3 (en partant de la gauche).
- Nous devons déplacer une tour formée de plusieurs anneaux [de tailles différentes, empilés dans l'ordre, du plus grand en bas au plus petit en haut] du pilier 1 au début au pilier 3 à la fin.
- On ne peut déplacer qu'un anneau à la fois [du pilier où il est vers une autre de son choix] et à condition que *son diamètre soit inférieur* à celui de l'anneau sur lequel on veut le poser.

Mots-clés

TOUR HANOI, PUISSANCES DE 2, RÉCURRENCE, ALGORITHME

Le but du jeu

Le but est de trouver le nombre de déplacements pour un certain nombre d'anneaux donné (ainsi que les déplacements d'anneaux à effectuer).
[Selon le texte d'Édouard Lucas, inventeur du jeu], la question initiale était: combien de temps la déesse Shiva mettra pour déplacer 50 anneaux de la tour 1 à la tour 3 en sachant qu'on ne peut effectuer qu'un déplacement par seconde ? Une fois la tour déplacée, ce sera la fin du monde.

Remarque [**Notation**]. Lors d'un déplacement, on a choisi de nommer la tour que l'on n'utilisait pas. Par exemple : le déplacement d'un anneau de la tour 1 à la tour 2 se nomme 3.
Il n'y a pas d'ambiguïté : on ne peut déplacer que l'anneau de plus petite taille des deux tours restantes.

Séquences et nombre de déplacements

? En effectuant les déplacements des tours d'Hanoï en pratique, nous avons pu aboutir à ce tableau qui représente les séquences de mouvements et le nombre de déplacements.

Nombre d'anneaux	Séquence de mouvements	Nombres de déplacements
1	2	1
2	321	3
3	231 231 2	7
4	321 321 321 321 321	15
5	231 231 231 231 231 231 231231 231 231 2	31
n-1	...	A
n	...	$2\times A+1$

Tableau 1

[Nous avons vérifié les résultats de ce tableau pour n = 1, 2, 3, 4 et 5. La manière de passer d'une solution pour n disques à une solution pour n+1 disques, n'est pas expliquée par les auteurs, mais on peut la deviner et conjecturer qu'elle fournit bien une solution générale.
La séquence de déplacements proposée est-elle la plus courte possible ou pourrait-on l'améliorer ? ... La question reste ouverte.]

Formule pour le nombre de déplacements

Comme on a utilisé la multiplication par 2 [pour passer d'une solution à la suivante], on « voit » apparaître des facteurs 2 et donc l'idée des puissances de 2.

Nombre de disques	Nombres de déplacements	Puissances de 2
1	1	$2 = 2^1$
2	3	$4= 2^2$
3	7	$8= 2^3$
4	15	$16= 2^4$
5	31	$32= 2^5$
6	63	$64= 2^6$
7	127	$128= 2^7$
8	255	$256= 2^8$
9	511	$512= 2^9$
10	1023	$1024= 2^{10}$
n-1	$2^{n-1} - 1$	2^{n-1}
n	$2 (2^{n-1}- 1) + 1$ $= 2^n - 2 + 1$ $= 2^{n-1} - 1$	2^n

Tableau 2

On a constaté qu'entre la colonne du nombre des déplacements et la colonne des puissances de 2, il fallait soustraire 1. Ainsi, pour 5 anneaux, il faut [avec la méthode proposée] 2^5 déplacements.

Pour le démontrer pour n'importe quel nombre d'anneaux, passons du nombre de déplacements de la tour de n-1 anneaux à la tour de n anneaux. On a vu dans le tableau précédent que pour n anneaux, on multiplie le nombre de déplacements pour n-1 anneaux par 2 et on ajoute 1. Ainsi on multiplie 2^{n-1} par 2 et on ajoute 1. On obtient alors après développement et réduction qu'il faut 2^n - 1 déplacements.

Conclusion

Donc quelque soit le nombre choisi nous pouvons en déduire le nombre de déplacements [utilisé dans notre méthode].

?

[*En faisant l'hypothèse que la méthode trouvée est la plus courte possible*], le problème des tours d'Hanoï est donc résolu.

Réponse au problème de la déesse Shiva : il faudrait 2^{50}- 1 déplacements et donc 2^{50}- 1 secondes soit environ 10^{15} secondes, c'est à dire environ 32 millions d'années avant la fin du monde.

***