

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

JEUX AVEC L'INFINI

Article rédigé par **Emanuele Bonalumi, Veronica Cera et Tommaso Villa**
élèves de 1ère, année scolaire 2024-2025

Établissement : **Lycée Stendhal de Milan**, Italie

Enseignants : **Anne-Cécile Airoidi, Dominique De Luca**

Chercheur : **Jean-Paul Delahaye**, professeur émérite de l'Université de Lille1, Centre de recherche en informatique, signal et automatique – UMS CNRS

Une partie des résultats a été présentée au Congrès MATH.en.JEANS de Marseille 2025.

Présentation :

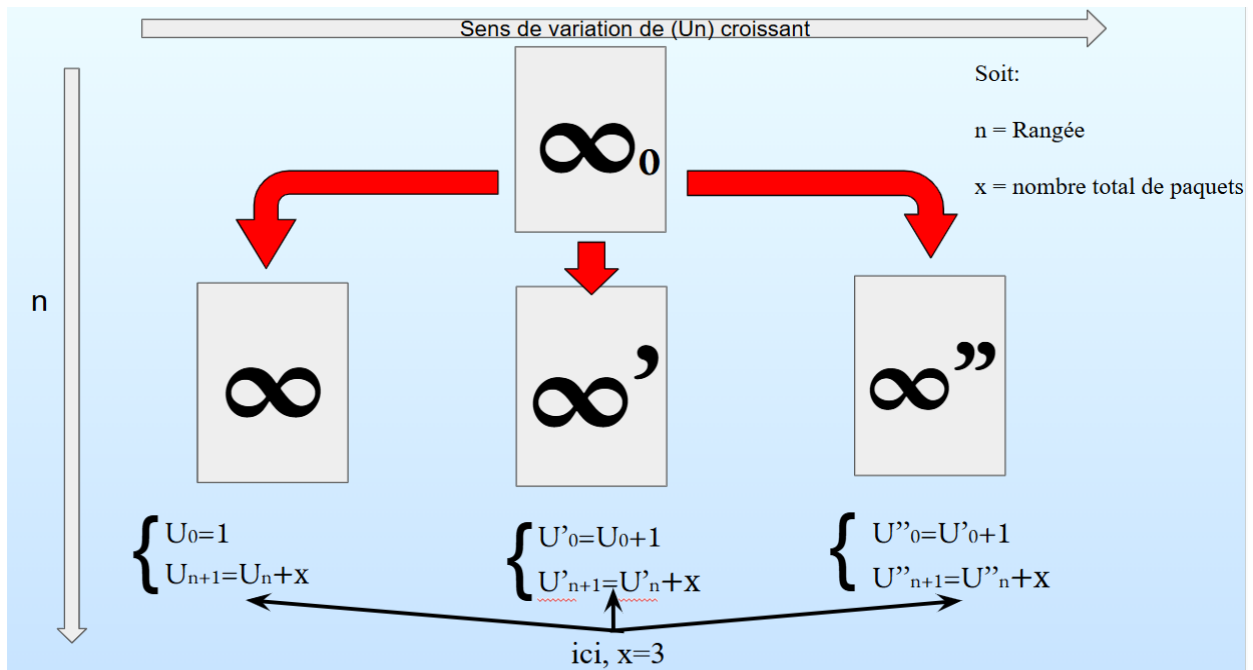
Le jeu exige un peu d'imagination, mais à condition d'accepter de croire qu'on peut manipuler des jeux de cartes infinis, et qu'on peut en allant de plus en plus vite réussir une infinité de manipulations en une durée finie de temps, tout est possible... et très mathématique !

Problématique : Comment pouvons nous étudier les suites de 1 à l'infini ?

Pour répondre à cette question nous imaginons de disposer d'un paquet infini de cartes. Nous allons étudier comment le diviser en x paquets de cartes infinis, en procédant par cartes croissantes successives (1, 2, 3, 4, 5 ...).

Diviser un paquet infini pour obtenir des paquets infinis ?

Notre objectif étant donc de diviser un paquet infini de cartes en x paquets infinis de cartes, nous remarquons que les x paquets obtenus sont représentables par des suites arithmétiques croissantes de raison x . $U_{n+1} = U_n + x$, comme représenté par le schéma ci-dessous.



Nous pouvons donc écrire ces suites arithmétiques définies par récurrence : $U_{n+1} = U_n + x$ et définies par son terme général : $U_n = U_0 + nx$

En imaginant avoir un nombre de paquets x , composés de n rangées, on cherche à comprendre comment on peut trouver le numéro d'une carte avec ces variables.

Soit P le paquet où on cherche le numéro de la carte :

$$N_{\text{carte}} = (n - 1)x + P$$

| | Paquet 1 | Paquet 2 | Paquet 3 | Paquet P |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Rangée 1 | 1 | 2 | 3 | P |
| Rangée 2 | $x + 1$ | $x + 2$ | $x + 3$ | $x + P$ |
| Rangée 3 | $2x + 1$ | $2x + 2$ | $2x + 3$ | $2x + P$ |
| Rangée n | $(n - 1)x + 1$ | $(n - 1)x + 2$ | $(n - 1)x + 3$ | $(n - 1)x + P$ |

x = numéro de paquets totaux

n = rangée

P = numéro du paquet

Si cette formule nous permet de trouver le numéro d'une carte en fonction du paquet et de la rangée, il est pourtant possible de situer la carte en partant du numéro de la carte et du numéro x de paquets, on obtiendrait donc sa position dans les paquets et la rangée. Ceci est possible à travers la division euclidienne. En divisant le numéro de la carte par le numéro x de paquets, on obtient la rangée tandis que le reste sera le paquet dans lequel se situe la carte.

Comment découvrir dans quel paquet se trouve une carte ?

Nous avons jusqu'à présent étudié comment nous pouvons trouver le numéro d'une carte à partir du nombre de paquets et du numéro du paquet dans lequel la carte se trouve. Comprenons maintenant comment découvrir dans quel paquet se trouve une carte à partir de son numéro. Ceci est possible grâce à la division euclidienne. En divisant le numéro de la carte par le numéro de paquets nous obtiendrons pour résultat le rang de la carte et le reste sera la paquet dans lequel se trouve la carte. Faisons un exemple avec 3 paquets et le numéro 16 :

| | |
|----|-----|
| 16 | X=3 |
| 1 | 5 |

Comment obtenir une suite de 1 à l'infini grâce à des « baguettes magiques » ?

baguette magique 1

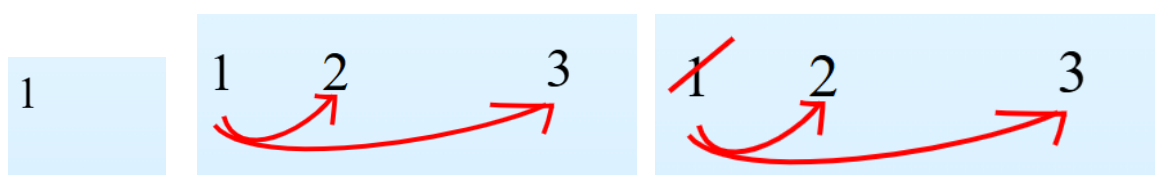
Étudions maintenant comment nous pouvons exploiter des baguettes magiques (qui vont transformer une ou plusieurs cartes en d'autres) pour obtenir une suite de cartes croissante successive de nombres appartenant à \mathbb{N} , de 1 jusqu'à l'infini, en partant de la carte numéro 1.

Considérons tout d'abord une première baguette magique qui va nous permettre de transformer une carte initiale, qui va disparaître, en deux autres cartes : le nombre présent sur la carte initiale +1 et le nombre présent sur la carte initiale +2.

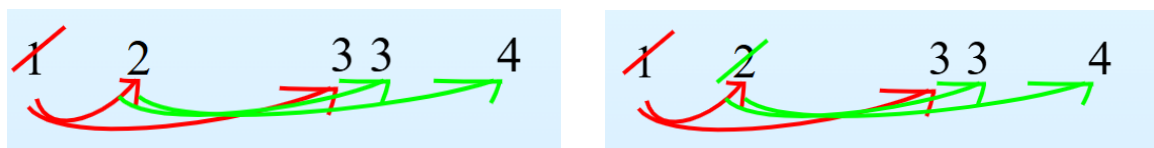
Ainsi, pour une carte initiale 1, nous allons obtenir, comme nous l'indique le schéma ci-dessous, une suite allant de 3 jusqu'à l'infini.

exemple : la carte numéro 1 se transforme en carte 2 et 3 avant de disparaître.

—> la carte 1 se transforme en 2 et 3, la carte 1 disparaît donc :



—> la carte 2 se transforme en 3 et 4 (des doublons se créent), et la carte 2 disparaît :



Et ainsi de suite, jusqu'à l'infini :



baguette magique 2

Nous allons maintenant utiliser une deuxième baguette magique qui va transformer deux cartes a et b . Soient, ainsi, a et b deux nombres entiers, appartenant à \mathbb{N} , où b est plus grand que a . La baguette donne alors comme résultats a et $b - a$.

Par conséquent, si l'on choisi deux chiffres $a = 2$ et $b = 3$, les cartes créées seront 2 ($a = 2$) et 1 ($b - a = 3 - 2 = 1$).

Or, notre objectif principal était celui d'obtenir une suite de tous les nombres de 1 jusqu'à l'infini. On a donc essayé de combiner les deux baguettes pour enfin atteindre notre résultat. Malheureusement, à partir de la carte 10, nous avons remarqué que les nombres commencent à doubler, ce qui rend impossible d'aller jusqu'à l'infini (nous pouvons dire qu'en combinant ces deux baguettes nous obtenons une suite de 1 à 10).[\(1\)](#)

Une troisième baguette magique ?

Nous n'étions absolument pas satisfaits. C'est pourquoi nous avons créé une troisième baguette magique :



Cette baguette transforme la carte n en la carte n et la carte $n + 1$ ce qui « compense » la disparition due à la première baguette en particulier. Rappelons nous qu'après la transformation, la carte n va disparaître en ne laissant pas de doublons dans la suite (en effet, la carte 2 créée par la carte 1 va disparaître en créant une seule carte 2 et une carte 3) : par exemple, $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow \dots \rightarrow \infty$

Cela crée la suite qu'on cherchait.

Au contraire, si on commence de l'infini pour obtenir une suite de nombres de l'infini jusqu'à 1 nous pouvons utiliser une baguette « opposée », qui transforme la carte n en la carte n et la carte $n - 1$.

Nous avons donc atteint notre objectif en créant une troisième baguette magique.

Petite curiosité

Il y a $52!$ possibles combinaisons de séries dans un paquet de 52 cartes. Cela équivaut à environ 8×10^{67} .

Il est donc fort probable en mélangeant un paquet de cartes, que l'on obtienne une série jamais vue auparavant !

Note d'édition

(1) On pourrait essayer de programmer ces baguettes magiques pour vérifier cette affirmation.