

Suite d'opérations

Année 2022 – 2023

Élèves de 4^{ème} : Alexis BUCHELIN, Antonin CHAZOTTES, Amaury DE VISMES OTT, Calliste GOMBAULT, Clément JEGU, Elliot LECLERE, Tristan PICHON, Simon ROY.

Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).

Enseignants : Florence FERRY et Kaourintin LE GUIBAN.

Chercheur : Emmanuel KAMMERER, Ecole Polytechnique Paris-Saclay.

Le sujet : Quel est le plus grand entier s'écrivant avec des sommes et produits de N chiffres 1 ? De combien de façons peut-il être obtenu ? Que dire si l'on remplace 1 par 2, 3... ?

Nos résultats : Nous avons démontré que pour les chiffres 1, le meilleur résultat s'obtient d'une ou de deux façons et nous pouvons donner ce résultat précisément quel que soit le nombre de chiffres 1 donné au départ. Pour les chiffres 2 et au delà, nous avons également démontré que nous pouvons donner le meilleur résultat : ce résultat est unique au-delà de 2 ; pour 2, il peut y avoir plusieurs façons de l'obtenir et nous pouvons dire combien il y en a pour un nombre de chiffres 2 donné.

I – Compréhension du sujet

Prenons un premier exemple avec 7 chiffres 1 :

$$(1+1+1)\times(1+1)+1+1=8 \quad ; \quad 1+1+1+1+1+1+1=7 \quad ; \quad 1+(1+1+1)\times(1+1+1)=10$$
$$(1+1+1)\times(1+1+1+1)=12$$

Ici le plus grand entier s'écrivant avec 7 chiffres 1 est 12. Mais est-ce vraiment le plus grand ?

Voici un deuxième exemple avec 9 chiffres 1 :

$$(1+1+1)\times(1+1+1+1+1+1)=18 \quad ; \quad (1+1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=24 \quad ;$$
$$(1+1+1+1+1)\times(1+1+1+1)=20$$

Ici encore, on se demande s'il y a un meilleur résultat.

II – Recherche du meilleur résultat

Pour commencer nos recherches, nous avons pris un petit nombre de chiffres 1 que nous avons augmenté petit à petit et nous avons étudié tous les cas. Nous avons répertorié ces recherches dans le tableau suivant.

Nombres de « 1 »	Calcul donnant le meilleur résultat	Résultats
1	1	1
2	1+1	2
3	1+1+1	3
4	1+1+1+1 ou $(1+1)\times(1+1)$	4
5	$(1+1+1)\times(1+1)$	6
6	$(1+1+1)\times(1+1+1)$	9
7	$(1+1+1)\times(1+1)\times(1+1)$ ou $(1+1+1)\times(1+1+1+1)$	12
8	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1)$	18
9	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)$	27
10	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1+1)$ ou $(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1)\times(1+1)$	36
11	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1)$	54
12	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)$	81
13	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1+1)$ ou $(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1)\times(1+1)$	108
14	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1)$	162

On peut écrire les résultats de la colonne du milieu sous forme condensée avec des puissances.

Nombres de « 1 »	Calcul donnant le meilleur résultat	Résultats
1	1	1
2	1+1	2
3	1+1+1	3
4	1+1+1+1 ou $(1+1)^2$	4
5	$(1+1+1)\times(1+1)$	6
6	$(1+1+1)^2$	9
7	$(1+1+1)\times(1+1)^2$ ou $(1+1+1)\times(1+1+1+1)$	12
8	$(1+1+1)^2\times(1+1)$	18
9	$(1+1+1)^3$	27
10	$(1+1+1)^2\times(1+1+1+1)$ ou $(1+1+1)^2\times(1+1)^2$	36
11	$(1+1+1)^3\times(1+1)$	54
12	$(1+1+1)^4$	81
13	$(1+1+1)^3\times(1+1+1+1)$ ou $(1+1+1)^3\times(1+1)^2$	108
14	$(1+1+1)^4\times(1+1)$	162

En observant ces résultats, on commence à comprendre que pour obtenir le meilleur résultat, nous devons faire le maximum de facteurs contenant une somme de trois chiffres 1. Plus précisément

nous pouvons énoncer la propriété :

Appelons R_N le plus grand résultat obtenu avec N chiffres 1 ;
 N est un entier strictement supérieur à 1. k est un nombre entier positif.
- Si $N=3\times k$ alors $R_N=3^k$
- Si $N=3\times k+1$ alors $R_N=3^{k-1}\times 4$
- Si $N=3\times k+2$ alors $R_N=3^k\times 2$

Nous allons démontrer cette propriété mais pour cela nous avons besoin de deux démontrer deux résultats.

Résultat 1 : Dans tous les facteurs, il n'y a que des additions.

Démonstration : En effet on a : $1\times 1 < 1+1$

Donc, maintenant, on considère que dans tous les facteurs il n'y a que des additions.

[Note 1](#)

Résultat 2 : Les facteurs n'ont pas plus de un « 1 » d'écart.

Démonstration : Prenons un produit de deux facteurs. Soit N un nombre entier strictement positif représentant le nombre de chiffres 1.

Si $N = 2a$ est pair, le meilleur résultat est a^2 . En effet : $(a - k)(a + k) = a^2 - k^2 < a^2$

Si $N = 2a + 1$ est impair, le meilleur est $a(a + 1)$.

En effet : $(a - k)(a + 1 + k) = a^2 + a + ak - ka - k - k^2 = a^2 + a - k^2 - k$

Or : $a^2 + a - k^2 - k < a^2 + a$ et $a^2 + a = a(a + 1)$

Donc : $a^2 + a - k^2 - k < a(a + 1)$ Finalement : $(a - k)(a + 1 + k) < a(a + 1)$

Nous venons de démontrer que pour obtenir le meilleur résultat, les facteurs doivent avoir le même nombres de « 1 » ou bien un « 1 » de différence.

Nous pouvons maintenant démontrer notre conjecture par récurrence.

Pour ce faire, nous allons démontrer que :

$$R_{N+3} \geq 3 \times R_N \quad (1) \text{ et } R_{N+3} \leq 3 \times R_N \quad (2) \text{ et donc que finalement : } R_{N+3} = 3 \times R_N .$$

$$(1) R_{N+3} \geq 3 \times R_N :$$

Si on multiplie R_N par $(1+1+1)$, on obtient $3 \times R_N$.

Donc on peut obtenir $3 \times R_N$ avec $N+3$ « 1 ».

Or R_{N+3} est le plus grand nombre que l'on peut obtenir avec $N+3$ « 1 ».

Donc : $R_{N+3} \geq 3 \times R_N$.

$$(2) R_{N+3} \leq 3 \times R_N :$$

On va commencer par démontrer par l'absurde qu'il ne peut pas y avoir que des facteurs égaux à 2 :

On va supposer que $R_{N+3} = 2^k$

Comme $N+3 \geq 6$ on peut écrire $2^k = 2^3 \times 2^{k-3}$ parce que 2^3 s'écrit avec six « 1 »

Avec six « 1 » on peut obtenir 9 : $(1+1+1) \times (1+1+1) = 9$

$$\frac{R_{N+3}}{9 \times 2^{k-3}} = \frac{2^3 \times 2^{k-3}}{9 \times 2^{k-3}} = \frac{8}{9} \text{ donc } R_{N+3} < 9 \times 2^{k-3}$$

Or on peut écrire $9 \times 2^{k-3}$ avec $N+3$ « 1 »

Donc il y a contradiction. Il y a donc un facteur $p \geq 3$ dans R_{N+3} .

On distingue 2 cas : $p=3$ (3) et $p \geq 5$ (4)

(a) S'il y a un facteur $p=3$:

$R_{N+3} = 3 \times M$. M peut s' écrire avec N « 1 » car on a besoin de 3 « 1 » pour écrire 3.

Donc : $M \leq R_N$ or : $M = \frac{R_{N+3}}{3}$. Donc : $R_{N+3} \leq 3 \times R_N$

(b) S'il y a un facteur $p \geq 5$:

Il existe un nombre M tel que : $R_{N+3} = p \times M$

On a alors : $R_{N+3} = \frac{p}{p-3} \times (p-3) \times M$

Or $p = 1+1+1+\dots+1$ avec p chiffres 1 ; donc $p-3 = 1+1+\dots+1$ avec p-3 chiffres 1.

Donc on peut écrire : $(p-3) \times M$ avec N chiffres 1.

Donc : $(p-3) \times M \leq R_N$ par définition de R_N . On a alors : $\frac{p \times (p-3) \times M}{p} \leq R_N$

Or, $p \times M = R_{N+3}$ Donc : $R_{N+3} \times \frac{(p-3)}{p} \leq R_N$ et donc : $R_{N+3} \leq R_N \times \frac{p}{p-3}$

Démontrons que $\frac{p}{p-3} \leq \frac{5}{2} \leq 3$

On a $p \geq 5$ donc

$$\begin{aligned} 3p &\geq 15 \\ 5p - 2p &\geq 15 \\ 5p - 15 &\geq 2p \\ 5(p-3) &\geq 2p \\ \frac{5}{2} &\geq \frac{p}{p-3} \end{aligned}$$

Donc : $\frac{p}{p-3} \leq \frac{5}{2} \leq 3$ et donc : $R_{N+3} \leq 3 \times R_N$

On a étudié toutes les valeurs possibles de p et donc nous avons bien démontré finalement que :

$$R_{N+3} = 3 \times R_N$$

On finalise la démonstration.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

Soit P_N la propriété : « le plus grand résultat est 3^k si $N = 3 \times k$, $3^{k-1} \times 4$ si $N = 3 \times k + 1$ et $3^k \times 2$ si $N = 3 \times k + 2$ »

Initialisation :

Pour $N = 2$: $R_2 = 2$ donc P_2 est vraie.

Pour $N = 3$: $R_3 = 3$ donc P_3 est vraie.

Pour $N = 4$: $R_4 = 4$ donc P_4 est vraie.

[Note 2](#)

[Note 3](#)

[Note 4](#)

Supposons que pour un entier N supérieur ou égal à 2, P_N est vraie, on a démontré alors que P_{N+3} est vraie.

Donc notre propriété est démontrée.

Remarque : Nous pouvons aussi dire que le meilleur résultat s'obtient d'une seule façon sauf dans les cas où il y a un facteur de 4 chiffres 1 ; celui-ci pourra être remplacé par deux facteurs étant chacun la somme de deux chiffres 1, c'est le cas quand le nombre de chiffres 1 est le nombre entier qui suit un multiple de 3.

III – Avec d’autres chiffres que 1

Nous reprenons notre recherche du meilleur résultat en prenant d’autres chiffres que 1.

1) Recherche du meilleur résultat avec des chiffres 2

Voici les résultats trouvés après avoir étudié tous les cas.

Nombre de « 2 »	Calculs donnant le meilleur résultat	Résultats	Nombre de possibilités d'obtenir ce résultat
1	2	2	1
2	2×2 ou $2 + 2$	4	2
3	$2 \times 2 \times 2$ ou $2 \times (2 + 2)$	8	2
4	$2 \times 2 \times 2 \times 2$ ou $2 \times 2 \times (2 + 2)$ ou $(2 + 2) \times (2 + 2)$	16	3
5	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ou $2 \times 2 \times 2 \times (2 + 2)$ ou $2 \times (2 + 2) \times (2 + 2)$	32	3
6	2^6 ou ...	64	4
7	2^7 ou ...	128	4
8	2^8 ou ...	256	5
9	2^9 ou ...	512	5
10	2^{10} ou ...	1024	6

Propriété 1 : Le meilleur résultat pour N chiffres 2 est 2^N .

Démonstration : On a : $2 \times 2 \geq 2 + 2$; faire des additions de 2 n'est jamais mieux que faire des multiplications ; au pire, cela donne le même résultat (pour deux chiffres 2 uniquement). Donc le meilleur résultat (qui n'est pas unique) sera obtenu en multipliant les N facteurs 2, ce qui nous donne 2^N .

Nous remarquons également que le nombre de façons d'obtenir le meilleur résultat suit une sorte de suite décrite dans la propriété 2 ci-dessous. En effet, comme $2 \times 2 = 2 + 2 = 4$, à chaque produit 2×2 , on a un résultat équivalent en le remplaçant par $2 + 2$, ce qui nous donne plusieurs possibilités pour obtenir un même résultat.

Remarque : On ne tient pas compte de l'ordre des facteurs pour compter le nombre de possibilités. Par exemple : $(2 + 2) \times 2 \times 2$ ou $2 \times 2 \times (2 + 2)$ ou encore $2 \times (2 + 2) \times 2$ sera considéré comme une même façon d'écrire ce résultat.

Propriété 2 : On donne N chiffres 2, N est un nombre entier strictement positif.

Si N est pair, il existe un entier k tel que : $N = 2k$: il y a alors $k + 1$ façons d'obtenir le meilleur résultat.

Si N est impair, il existe un entier k tel que : $N = 2k + 1$: là encore, il y a $k + 1$ façons d'obtenir le meilleur résultat.

Exemple : si on prend 8 chiffres 2 : $8 = 2 \times 4$ Il y a $4 + 1 = 5$ façons de trouver le meilleur résultat.

Si on prend 11 chiffres 2 : $11 = 2 \times 5 + 1$ Il y a $5 + 1 = 6$ façons de trouver le meilleur résultat.

Démonstration

Prenons N chiffres 2 : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 \times 2$

Si N est pair, il existe un entier k tel que : $N = 2k$, sinon : $N = 2k + 1$.

Que N soit pair ou impair, il y a le même nombre de produits 2×2 , il y en a k .

On peut alors remplacer un produit 2×2 par une somme de $2 + 2$, ou bien deux produits 2×2 par des sommes de $2 + 2$, ou bien trois produits 2×2 par des sommes de $2 + 2$, etc...

Il y a donc k façons d'écrire le résultat en remplaçant les « 2×2 » par « $2 + 2$ » ; à ces k façons, on ajoute celle où il n'y a que des facteurs 2. Cela nous donne bien $k + 1$ façons d'obtenir le meilleur résultat.

2) Recherche du meilleur résultat avec des nombres entiers supérieurs ou égaux à 3

Soit n , un nombre supérieur ou égal à 3 : on a $n \times n > n + n$

Comme la multiplication donne un résultat strictement supérieur à l'addition, on ne fera que des multiplications. Ainsi, pour N nombres x , le meilleur résultat est : n^N et la façon de l'écrire est unique.

NOTES

1) Le résultat 1 (page 3) énonce que, dans chaque facteur, il n'y a que des additions, mais cela suppose qu'il existe toujours une expression arithmétique pour le plus grand nombre qui soit un produit d'un certain nombre de facteurs. Il faudrait justifier cela.

2) La justification du résultat 2 est claire mais aurait pu bénéficier d'une phrase en plus pour le cas où on a plus que 2 facteurs, en se ramenant au cas de 2.

3) De même, on aurait pu ajouter une phrase pour justifier l'étude des seuls cas $p=3$ et $p \geq 5$ dans la démonstration par récurrence : on pourrait rédiger en disant qu'il y a soit au moins un facteur valant 3, soit au moins un facteur valant 5, soit tous les facteurs devraient valoir 4 et on obtiendrait le même nombre avec uniquement des facteurs valant 2, ce qui a été exclu précédemment.

4) Après l'initialisation de la récurrence (cas $N=2,3,4$), il vaut mieux supposer N supérieur ou égal à 3, car dans la récurrence on utilise le fait que $N+3$ vaut au moins 6. Il faudrait alors aussi vérifier le cas $N=5$.