Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Pavage par des L

Année 2025 – 2026

Arthur Manceau, Nathan Morel, élèves de terminale

Établissement : Lycée René Descartes, Rennes

Enseignante : Sabine Giros

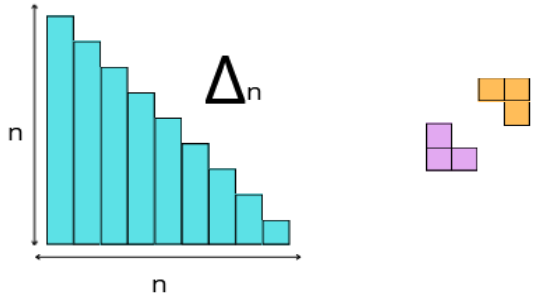
Chercheur : Vincent Guirardel, IRMAR

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

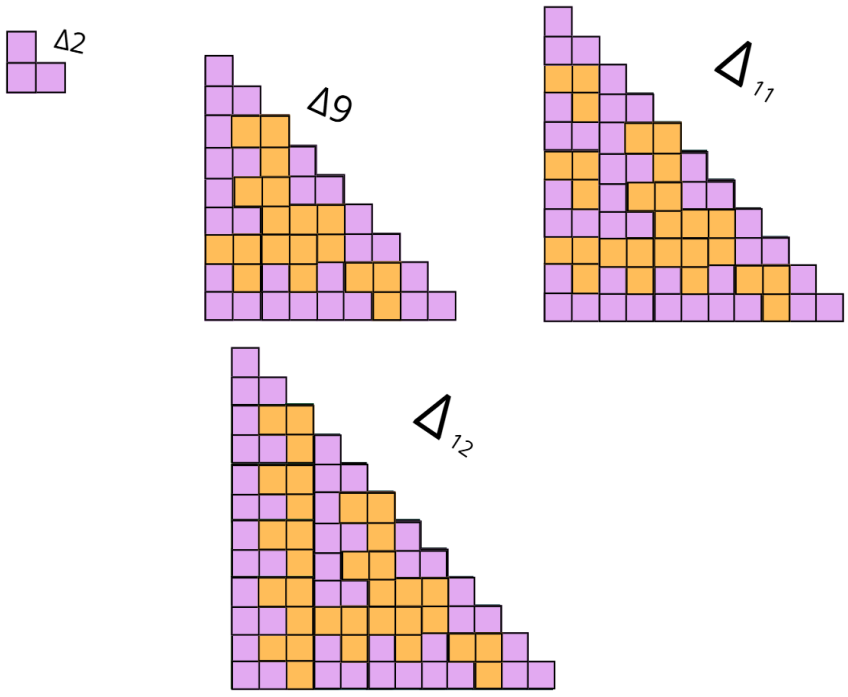
Nous allons essayer de savoir pour quelles valeurs de n, Δ_n (l'escalier) est pavable par des L (violet) et des anti-L (orange) non pivotables.

On dira alors que Δ_n est pavable.



1.2. Premières recherches :

Au début de nos recherches nous avons cherché à la main pour quelles valeurs de n ($n < 16$ car au-delà trop long et trop complexe), Δ_n est pavable par des L et des antis-L.
Nous avons ainsi trouvé que Δ_0 ;Δ_2 ;Δ_9; Δ_{11}; Δ_{12} et Δ_{14} sont pavables :



2. Divisibilité du nombre de cases qui constituent le polygone

2.1. Première propriété

Dans un premier temps on remarque que L et anti-L sont composés de 3 cases donc pour que Δ_n soit pavable, le nombre de cases qu'il contient doit être un multiple de 3.

Soit N le nombre de case de Δ_n : $N = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Propriété 1 : Δ_n **est pavable uniquement si** $3|N$ **soit** $N = 3k$ **,** $k \in \mathbb{N}$

On élimine ainsi des polygones pavables : Δ_1, Δ_4, Δ_7 et Δ_{10} parmi les 12 premiers Δ_n.

En effet 1 ; 10 ; 28 et 55 ne sont pas divisibles par 3.

2.2. Généralisation

On peut alors étendre cette propriété : soit $\boldsymbol{n' \equiv n[12]}$ $\boldsymbol{alors}$ $\boldsymbol{n' = n + 12p}$, $\boldsymbol{(n,p)} \in \mathbb{N}^2$

On conjecture que si $\frac{n(n+1)}{2}$ est divisible par 3 alors $\frac{n'(n'+1)}{2}$ aussi.

Prouvons le : Supposons $\frac{n(n+1)}{2} = 3k$,$k \in \mathbb{N}$ ou encore $n^2 + n = 6k$. Alors :

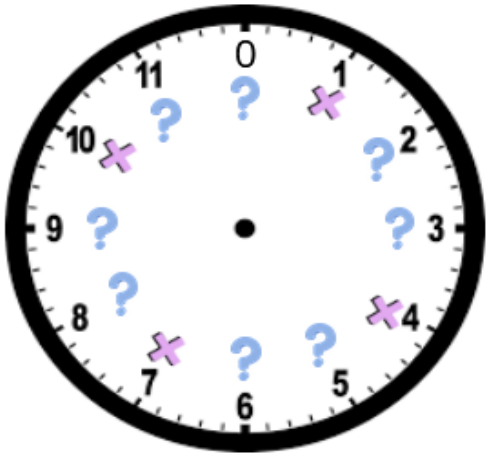
$$\frac{n'(n'+1)}{2} = \frac{(n+12p)(n+1+12p)}{2} = \frac{n^2+n+24np+12p+144p^2}{2}$$

$$= \frac{6(k+4np+2p+24p^2)}{2} = 3(k+4np+2p+24p^2) = 3k',\ k' \in \mathbb{N}$$

Donc si $\frac{n(n+1)}{2}$ est divisible par 3 alors $\frac{n'(n'+1)}{2}$ l'est aussi.

Donc pour tout $n \in \{1;4;7;10\}[12]$, Δ_n **n'est pas** pavable. (1)

On obtient ainsi :

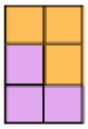


3. Différentes règles :

3.1. Règle des 2 :

Soit un Δ_n pavable (en bleu sur la figure ci-dessous), où n est un multiple de 3, alors $n = 3p$, $p \in N$.

On peut rajouter à gauche de Δ_n, p fois l'assemblage :

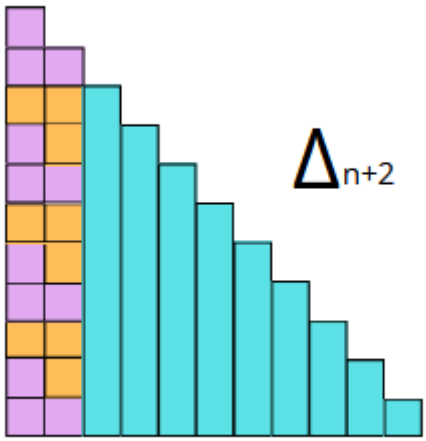


Puis ajouter :



comme on le voit ci-dessous.

On obtient ainsi :



Propriété 2 : si Δ_n est pavable avec $3|n$, alors Δ_{n+2} est pavable

3.2. La règle des 3

Soit un Δ_n pavable (en bleu sur la figure ci-dessous) où n est impair, alors $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$ est pair.
(2) On peut rajouter à gauche de Δ_n , $p + 1$ fois l'assemblage :

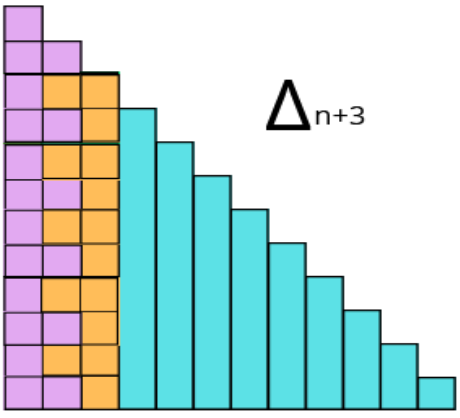


Puis ajouter :



comme on le voit ci-dessous.

On obtient ainsi :



Propriété 3 : si Δ_n est pavable avec $n = 2k + 1$, alors Δ_{n+3} est pavable

3.3. La règle des 5

Corollaire : Si Δ_n est pavable et n divisible par 3 et impair alors Δ_{n+5} est pavable

En effet :

Si Δ_n est pavable et n divisible par 3 et impair alors on peut appliquer la règle des 2 et Δ_{n+2} est pavable. Or n est impair donc $n+2$ est impair, on peut ensuite appliquer la règle des 3 alors Δ_{n+5} est pavable

3.4. La règle des 12

Propriété 4 : si Δ_n est pavable alors Δ_{n+12} est aussi pavable

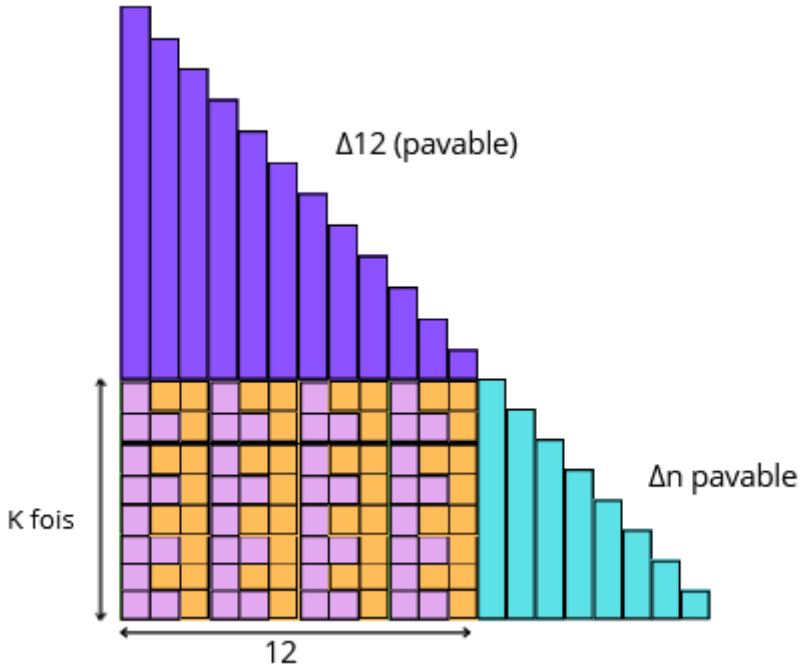
Démontrons-le par disjonction de cas :

❶ Soit un Δ_n pavable et n pair, $n = 2k$, alors on peut ajouter à gauche de Δ_n k fois cette structure :



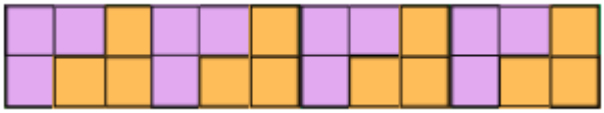
Ensuite on ajoute Δ_{12} (pavable) au-dessus.

On obtient ainsi :

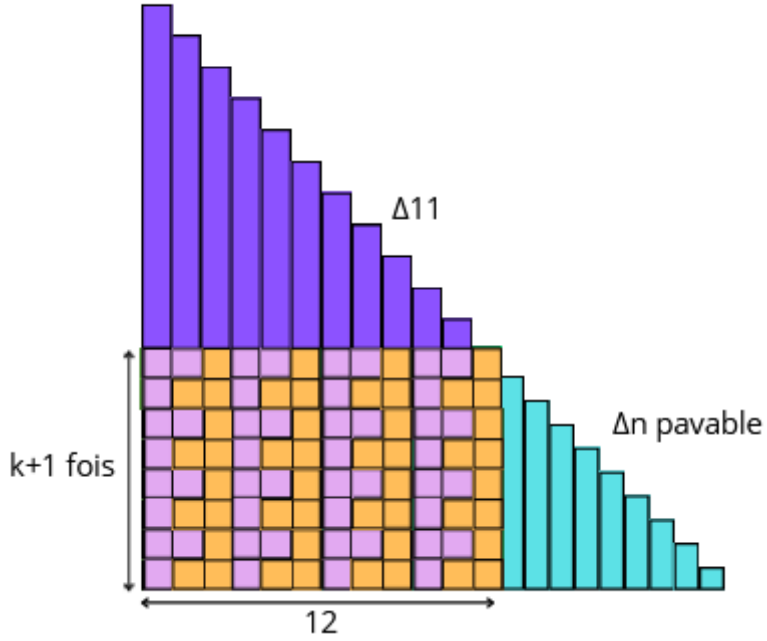


Si Δ_n pavable et n pair alors Δ_{n+12} est pavable

❷ Soit un Δ_n pavable et n impair, $n = 2k + 1$, alors on peut ajouter, à gauche de Δ_n , $k + 1$ fois cette structure :

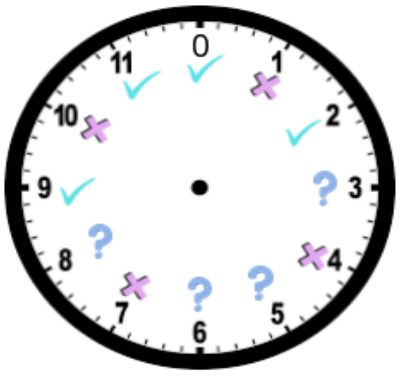


Ensuite on ajoute Δ_{11} (pavable) au-dessus :



Si Δ_n pavable et n impair alors Δ_{n+12} est pavable

4. Bilan, modulo 12, des polygones pavables



Il reste encore à travailler, modulo 12, sur les polygones Δ_3, Δ_5, Δ_6 et Δ_8

Complément :

Pour Δ_n avec $n \equiv 3{,}5{,}6\ ou\ 8\ [12]$, la solution a été trouvée par John Conway en 1988 dans son article « Tiling with Polyominoes and Combinatorial Group Theory », article au-dessus de notre niveau actuel.

Ainsi Δ_3, Δ_5, Δ_6 et $\Delta_8$modulos 12 ne sont pas pavables.

Notes d'édition

(1) Cette assertion est vraie mais le raisonnement est confus et malmène implication et équivalence. Cela est dû à la formulation de la condition arithmétique. En effet ce que montre le calcul au-dessus de cette conclusion c'est que si deux entiers n et n' sont congrus modulo 12, la divisibilité par 3 de $\frac{n(n+1)}{2}$ **équivaut** à celle de $\frac{\boldsymbol{n'(n'+1)}}{\boldsymbol{2}}$ (l'entier noté p dans le texte est un entier **relatif** qui peut être négatif). Par conséquent, si n est congru à 1,4,7 ou 10 modulo 12, Δ_n ne sera pas pavable. D'ailleurs le choix de travailler modulo 12 semble artificiel. En effet la divisibilité par 3 de $\frac{n(n+1)}{2}$ équivaut à dire que $n(n+1)$ est congru à 0 modulo 6. En faisant un tableau de congruences modulo 6 on voit rapidement que cette condition équivaut à dire que n est congru à 0,2,3 ou 5 modulo 6. Ainsi, dans les cas où n est congru à 1 ou 4 modulo 6, Δ_n ne peut pas être pavable ce qui donne donc le résultat trouvé par les auteurs.

(2) L'entier p n'est pas nécessairement pair.