Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Mais où est passé le chat de Mamie?

Année 2023 – 2024

Agathe Lafont et Toumani Heiss-Seguin, élèves de classe de première

Établissement : Lycée Gabriel Fauré, Paris

Enseignante : Nathalie Fromager

Chercheur : Alexis Metz-Donnadieu, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Le chat de notre voisine s'est enfui et se cache dans l'un des immeubles du quartier. Nous souhaitons le récupérer. On sait qu'il a une patte cassée, il peut donc seulement se déplacer d'un immeuble chaque nuit. Chaque immeuble doit être relié par une rue pour que le chat puisse s'y rendre.

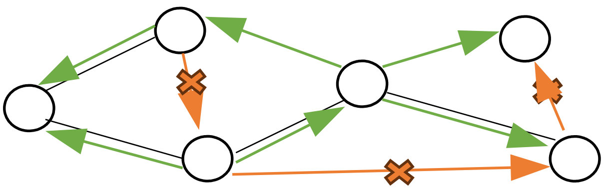


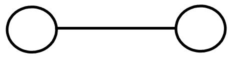
Figure 1. Un exemple de configuration d'immeubles et de rues.
Les flèches vertes indiquent certains déplacements possibles pour le chat durant une nuit,
les flèches rouges indiquent des déplacements impossibles.

On peut fouiller un seul immeuble chaque matin. Si on trouve le chat de notre voisine, la mission est terminée mais au contraire si on ne trouve pas le chat, pendant la nuit suivante il se déplacera et nous devrons reprendre notre recherche le matin suivant.

PROBLÉMATIQUE : Nous allons nous demander, en fonction de la configuration d'immeubles et de rues, s'il est possible de mettre en place une stratégie qui nous permette de trouver le chat autrement que par hasard. Si le chat est trouvable peut-on donner le nombre de jours maximum nécessaire pour le trouver ?

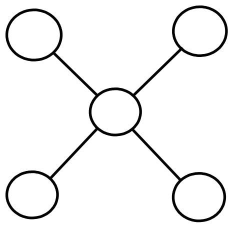
1.2. Deux premiers exemples

DEUX IMMEUBLES



S'il y a seulement 2 immeubles reliés par une rue, alors le chat est contraint de se déplacer d'un immeuble à l'autre chaque nuit. Nous pouvons donc trouver la position du chat en 2 jours maximum, il suffit de regarder deux fois de suite dans le même immeuble.

CENTRE UNIQUE

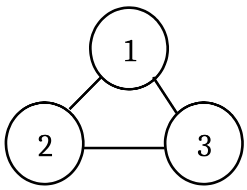


Si la configuration d'immeubles a un centre unique (c'est à dire un immeuble relié à tous les autres), alors le chat est contraint de passer par ce centre une nuit sur deux. Nous pouvons donc trouver le chat en deux jours en vérifient deux fois de suite au centre de la figure.

1.3. Le cas des cycles

CYCLES

On s'intéresse aux configurations d'immeubles qui représentent des cycles. Prenons l'exemple d'un graphe triangulaire :



:

Le jour 1: le chat est en 1,2 ou 3

Nous pouvons choisir l'immeuble que nous voulons car ils sont tous symétriquement identiques. Si nous regardons dans la case 1 (1) et que le chat n'y est pas : il est donc en 2 ou 3. La nuit, le chat bouge et le lendemain il est donc dans la case 1,2 ou 3. Nous sommes donc revenus à la situation initiale.
Étant donné que les cases sont symétriquement les mêmes, le résultat sera toujours identique.
Il est donc impossible de trouver le chat dans ce graphe autrement que par hasard.

Peu importe le graphe, si celui-ci contient un cycle alors nous pouvons immédiatement affirmer qu'il n'y a aucune stratégie pour trouver le chat. Nous pouvons expliquer cela par un système d'évolution, de stagnation et de mouvements inutiles comme ci-dessus. Ici aucune case ne nous permet une quelconque évolution sur notre connaissance de la position du chat. Chaque matin, nous retournons toujours à la situation initiale. S'il y a un cycle composé de plus de deux immeubles reliés entre eux alors il est impossible de trouver une stratégie pour retrouver le chat.

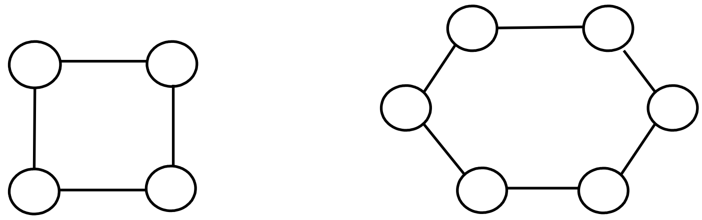
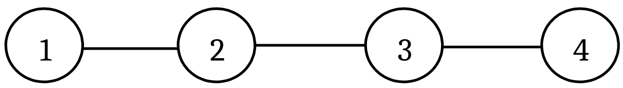


Figure 2. Des exemples de cycles

<u>Maintenant, nous allons seulement considérer des graphes dans lesquels il n'y a pas de cycle.</u>

2. Le cas des graphes linéaires

Prenons comme exemple une configuration de quatre immeubles alignés:



<u>AU JOUR 1. Le chat est en 1, 2, 3 ou 4</u>

- Si nous regardons dans la case 1 et que le chat n'y est pas, il est donc en 2, 3 ou 4. La nuit, le chat bouge et le lendemain il est donc dans la case 1, 2, 3 ou 4. Nous sommes donc revenus à la situation initiale, sans information supplémentaire par rapport à la veille, nous sommes donc dans une <u>stagnation</u>. Il est donc inutile de regarder dans la case 1 et par symétrie la case 4 est inutile aussi.
- Si nous regardons dans la case 2 et que le chat n'y est pas, il est donc en 1, 3, 4. La nuit le chat bouge, le lendemain il est donc en 2, 3, 4. Nous sommes donc dans une <u>évolution</u>. Par symétrie commencer par la case 3 aurait donné le même type d'évolution.

<u>CONCLUSION.</u> La première recherche doit être la case 2 ou symétriquement la 3. Ici nous étudierons la case 2. Si le chat n'y est pas, il est donc dans la case 2, 3 ou 4 le lendemain matin.

<u>JOUR 2. Le chat est en 2, 3 ou 4</u>

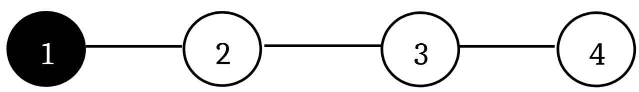


Figure 3. Au matin du deuxième jour, si on ne l'a pas encore trouvé,
le chat se trouve dans l'immeuble 2, 3 ou 4.

- Il est inutile de regarder dans le 1.
- Si nous regardons dans la case 2 et que le chat n'y est pas: il est donc en 3 ou 4. Le lendemain, le chat ayant bougé pendant la nuit, il est donc dans la case 2, 3, 4. Nous sommes donc dans une stagnation. Regarder dans la case 2 est donc inutile.
- Si nous regardons dans la case 3 et que le chat n'y est pas: il est donc en 2 ou 4. Le lendemain, le chat a bougé, il est donc dans la case 1, 3. Nous sommes donc dans une évolution.

- Si nous regardons dans la case 4 et que le chat n'y est pas: il est donc en 2 ou 3. Le lendemain, le chat a bougé, il est donc dans la case 1, 2, 3 ou 4. Nous sommes donc dans une régression.

CONCLUSION. La deuxième recherche doit être la case 3. Si le chat n'y est pas, il est donc dans la case 1 ou 3 le lendemain matin.

JOUR 3. Le chat est en 1 ou 3

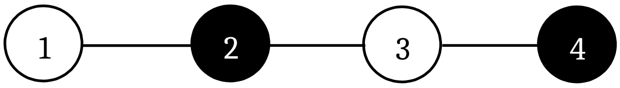


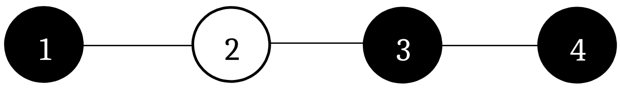
Figure 4. Au matin du troisième jour, si on ne l'a pas encore trouvé,

le chat se trouve dans l'immeuble 1 ou 3

- Il est inutile de regarder en 2 ou en 4.
- Si nous regardons dans la case 1 et que le chat n'y est pas, il est donc en 3. Le lendemain, le chat a bougé, il est donc dans la case 2 ou 4. Cette situation est symétrique à la disposition 1 et 3. Nous sommes donc dans une stagnation
- Si nous regardons dans la case 3 et que le chat n'y est pas: il est donc en 1. Le lendemain, le chat a bougé, il est donc dans la case 2. Nous sommes donc dans une évolution.

  CONCLUSION. La troisième recherche doit être la case 3. Si le chat n'y est pas, il est donc dans la case 2 le lendemain matin.

JOUR 4: Le chat est en 2

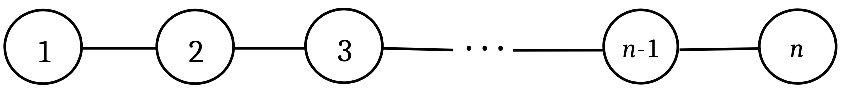


Pour trouver le chat, nous n'avons plus qu'à regarder dans la case 2.

CONCLUSION FINALE. La stratégie la plus rapide est la suivante : 2.3.3.2. Nous trouvons le chat au bout de 4 jours maximum.

Avec le même type de raisonnement, pour 5 immeubles alignés on a trouvé que la meilleure stratégie était: 2.3.4.4.3.2, avec donc un chat trouvable en 6 jours maximum (2).

On a pu établir le résultat pour *n* immeubles alignés :



– Meilleure stratégie : 2.3.4.… .*n*-2.*n*–-1.*n*–1.*n*–2. … .3.2

– Nombre de jours maximum pour trouver le chat : 2(*n*–2) .

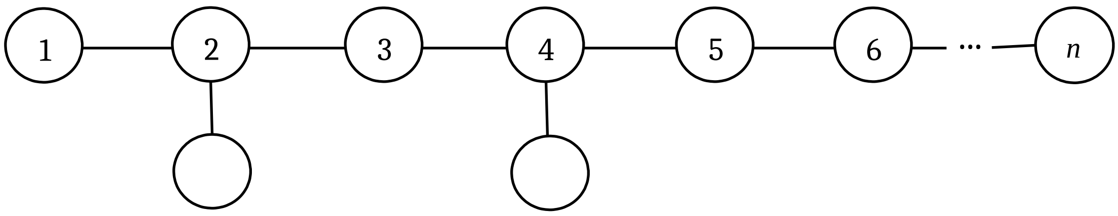
3. Vers des graphes plus compliqués

3.1. Ligne avec une ou plusieurs impasses de longueur 1

Suite aux résultats que nous avons obtenus précédemment, nous nous sommes demandé s'il était possible de trouver le chat si nous rajoutions une impasse à notre configuration linéaire.

Nous sommes arrivés au même résultat, il existe une stratégie permettant de retrouver le chat. Notre logique a été de repérer la rue principale, c'est à dire la configuration qui nous permet d'avoir le plus grand nombre d'immeubles alignés. À partir de cela nous en avons déduit qu'il était inutile de regarder dans les impasses car on peut les associer aux extrémités de notre graphe qui sont inutiles à regarder (3).

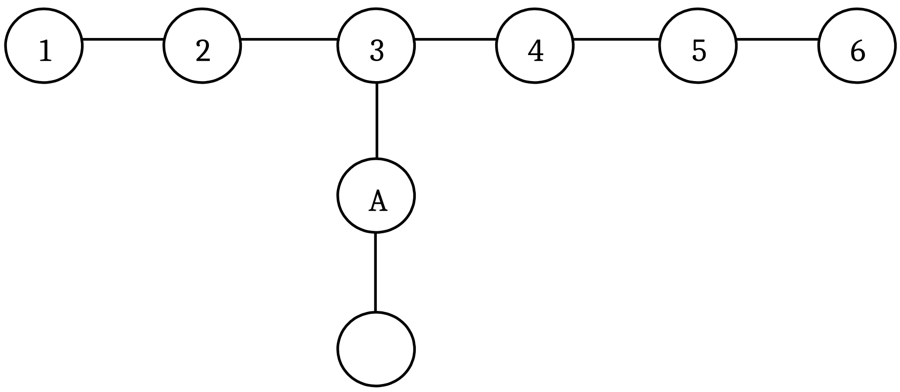
De fait, la stratégie d'aller-retour pour les graphes lignes marche encore dans ce cas. Elle permet de retrouver le chat en $2(n–2)$ nuits, où n est le nombre d'immeubles dans la rue principale.



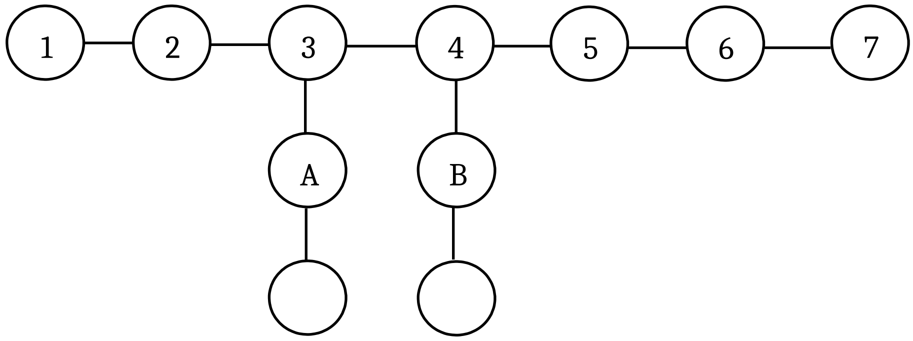
3.2. Ligne avec une ou plusieurs impasses de longueur 2

Par la suite nous nous sommes concentrés sur des immeubles alignés avec des impasses de longueur deux attachées à notre rue principale. Cependant, le nombre d'immeubles dans l'impasse étant de deux, nous sommes obligés de regarder dans le premier immeuble de l'impasse mais pas le deuxième. Nous procédons de la même manière que sur les configurations précédentes : un aller-retour où cette fois ci nous descendons dans chaque impasse.

Cette stratégie nous permet de trouver le chat peu importe le nombre d'impasses de deux (4).



<u>Stratégie pour trouver le chat</u> : 2.3.**A.3**.4.5-5.4.3.**A.3**.2 en 12 coups maximum.



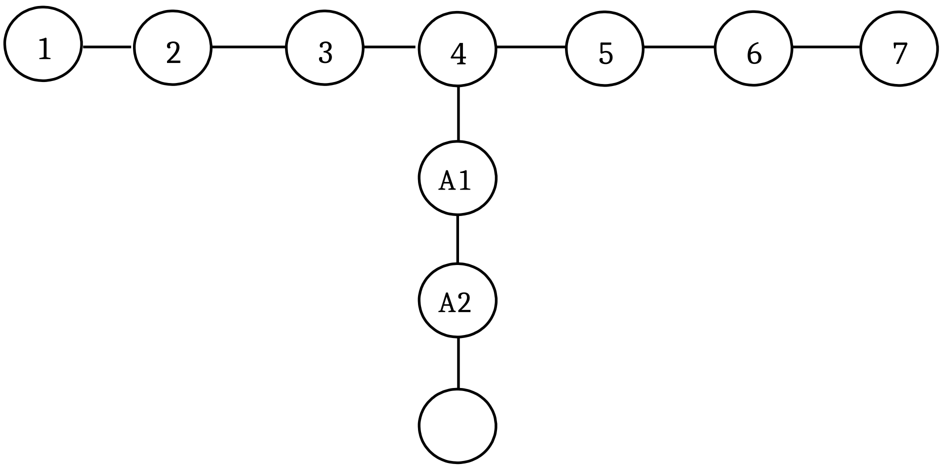
Stratégie pour trouver le chat : 2.3.**A.3**.4.**B.4**.5.6-6.5.4.**B.4**.3.**A.3**.2 en 18 coups maximum

Figure 5. Quelques exemples de configurations avec des impasses de longueur 2 et les stratégies associées

Chaque impasse de deux immeubles ajoute donc 2 visites à l'aller et 2 au retour, donc un total de 4 visites.

3.3. Ligne avec une ou plusieurs impasses de longueur plus grande que 3

Après cette découverte, nous nous sommes demandé s'il était aussi possible de trouver le chat lorsque qu'il y a des impasses de trois immeubles ou plus comme dans la situation suivante :



En suivant le même procédé que le précédent, nous regardons cette fois si dans les deux premiers immeubles de l'impasse. Dès que nous entrons dans le deuxième immeuble A2, nous perdons la trace du chat. Ici, les impasses sont donc trop longues, ce qui nous contraint à rester plus longtemps dedans. Cette plus longue durée nous fait perdre la trace du chat dans les autres parties du graphe (5).

Suite à ce résultat, nous pouvons affirmer qu'il est impossible de trouver le chat dans cette configuration. De plus, cette découverte nous a permis de déduire que pour n'importe quelle configuration, si celle-ci comporte une impasse de plus deux immeubles, il est impossible d'y trouver le chat autrement que par hasard.

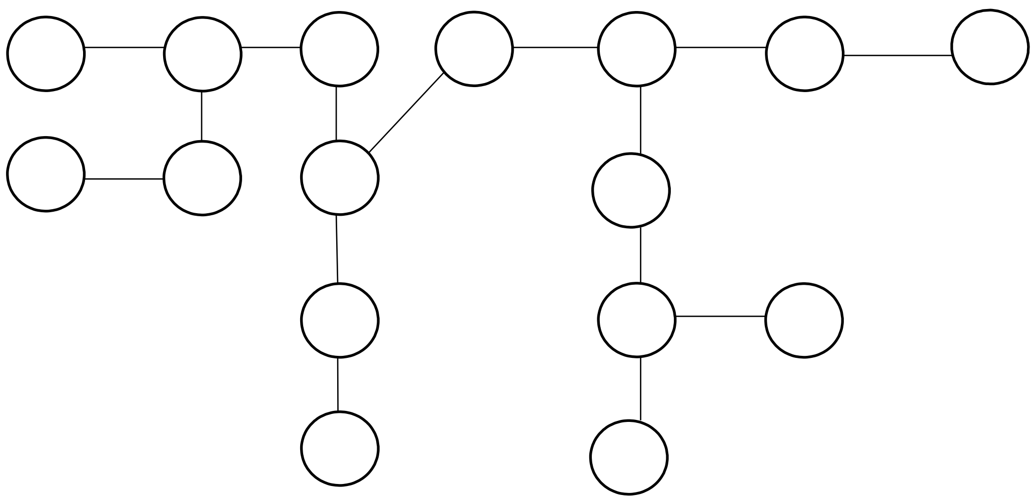
4. Conclusion

Il existe donc de multiples configurations d'immeubles dans lesquelles le chat est introuvable:

- Les graphes possédant des cycles
- Les formes complexes : rue principale avec des impasses de plus de deux immeubles

Mais dès que la configuration peut se mettre sous la forme d'une longue rue de n immeubles avec des impasses de 1 ou 2 immeubles, le chat est trouvable, et s'il y a m impasses de 2 immeubles, le chat est trouvable en au maximum $2(n-2) + 4m$ coups.

Alors saurez-vous trouver le chat dans ce graphe ?



Notes d'édition

(1) Ici et dans la suite, les *immeubles* sont aussi appelés des *cases*.

(2) Cela n'est pas si évident. En utilisant le même raisonnement, on montre bien qu'à symétrie près les seuls deux premiers coups intéressants sont de regarder les cases 2 puis 3 et, après déplacement le matin, le chat peut alors se trouver sur une des cases 1, 3 , 4,…, n. Après, cela est plus compliqué !

On peut se convaincre que la solution proposée fonctionne : après le premier passage par la case i et le mouvement du chat, celui ci ne peut être qu'en position 1 , 3 ,5 ,.., i, i+1,…, n–1, n si i est impair et 2 , 4 , 6,.., i, i+1,..., n–1, n si i est pair. Ainsi, après qu'on a regardé une première fois la case n-1, le chat est forcément sur une case de même parité que n–1. On regarde à nouveau la case n–1 et, après mouvement du chat, celui-ci ne peut être que sur une case de parité opposée à n–1, sauf la case n à laquelle il ne peut plus accéder. Ensuite, après le deuxième passage sur la case i et mouvement du chat, celui ne peut être que sur une case de parité opposée à celle de i et située à gauche de i. Enfin, quand on a regardé la case 3, il ne reste plus que la case 2.

Cette solution est effectivement optimale mais c'est assez complexe à montrer.

(3) Ce que les élèves entendent par "associer deux cases" n'est pas clair. Cependant le résultat est juste. Pour appliquer le même raisonnement que précédemment, on peut colorier les cases en noir et blanc de sorte que deux cases reliées ne soient pas de la même couleur. Si une impasse est reliée à la "route principale" en i, la case de l'impasse est de couleur opposée à celle de la case i ; après la première passe en i et mouvement du chat, il ne peut pas être dans cette impasse et on retrouve le raisonnement précédent en remplaçant même parité par même couleur, et parité opposée par couleur opposée.

(4) Pour justifier que cela fonctionne, on peut utiliser le même raisonnement que dans les notes précédentes en colorant les cases en noir et blanc et montrer qu'après avoir visité une impasse reliée en i à la route principale au premier passage, à gauche de i et dans l'impasse le chat ne peut être que sur des cases de même couleur…

(5) En effet, le chat peut alors repasser par le sommet qui relie l'impasse au reste du graphe et changer de côté. Cela montre que le même procédé en regardant deux cases de l'impasse ne fonctionne pas, mais cela ne permet pas d'affirmer qu'il n'y a pas d'autre solution.