# Les grilles gagnantes

Année 2021-2022

Auteurs : Apolline GERLAND, Rachaël GOURDON-BRINGAUD (Première générale).
Établissement : Lycée Paul Guérin, Niort (79).
Encadrés par : Fabien AOUSTIN, Thomas FORGET.
Chercheur : Abdallah EL HAMIDI, Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement, LaSIE, UMR CNRS 7356, La Rochelle Université.

*Dans cet article, on étudie un jeu consistant à placer des –1, des 0 et des 1 dans une grille carrée de façon à ce que les sommes des lignes et des colonnes soient toutes différentes.*
*On démontre que cela est toujours possible pour le cas de grilles paires et on étudie quelques cas de grilles impaires.*

## 1) Présentation du problème et premiers cas :

Le but du jeu est de remplir une grille carrée avec des 1, des 0 ou des –1 de façon à ce que les sommes des nombres inscrits sur chaque ligne et sur chaque colonne soient toutes différentes.
Une telle grille est dite « gagnante ».
Nous avons vite trouvé une grille gagnante de taille $2 \times 2$ :

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 0 | -1 |

On obtient en effet les sommes égales 2 et –1 en ligne et à 1 et 0 en colonne.
Toutes ces valeurs sont bien différentes donc la grille est gagnante.

Nous avons aussi obtenu une grille gagnante $4 \times 4$ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 0 | -1 | -1 | -1 | -3 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | -1 | 0 | -1 | -1 |
| 3 | -2 | 1 | 0 | |

## 2) Cas des grilles paires :

On s'intéresse ici au cas des grilles paires, c'est-à-dire des grilles $n \times n$ où $n$ est pair.
Nous avons trouvé une méthode permettant d'obtenir une grille gagnante paire aussi grande que l'on veut. Pour cela, on considère qu'on a déjà une grille gagnante $n \times n$ où $n$ est pair et où les sommes obtenues vont de $-(n-1)$ à $n$.
On va construire une grille gagnante $(n+2) \times (n+2)$ avec des sommes allant de $-(n+1)$ à $n+2$.
Pour réaliser cet agrandissement, il suffit de rajouter deux lignes en haut et deux colonnes à gauche.
On entoure en boomerang la grille existante de $-1$.
Au-dessus, on écrit une ligne de 1.
En dessous du 1 le plus à gauche, on met un 0 puis on complète la colonne de 1.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 |
| 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -9 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 1 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -3 |
| 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 |
| 9 | -8 | 7 | -6 | 5 | -4 | 3 | -2 | 1 | 0 | |

Passage d'une grille gagnante $8 \times 8$ à une grille gagnante $10 \times 10$.

Les sommes de la grille initiale $n \times n$ ne changent pas car, pour chaque ligne et colonne de celle-ci, on a ajouté un 1 et un $-1$ ce qui donne 0, donc les sommes initiales ne changent pas.
La ligne du haut est composée seulement de 1 ce qui nous donne la somme de $n+2$.
La première colonne est quant à elle composée de $n+1$ numéro 1 et un 0 ce qui donne la somme de $n+1$.
La deuxième ligne est dans la même configuration que la première colonne, sauf qu'on remplace les 1 par des $-1$ donc $n+1$ devient $-(n+1)$.
Dans la deuxième colonne, on a 1 et $-1$ qui s'annulent suivis d'une colonne de $-1$ ce qui nous donne un total de $-n$.
En partant de notre solution de grille gagnante $2 \times 2$, on obtient donc des grilles gagnantes $n \times n$ pour n'importe quel entier $n$ pair.

## 3) Cas des grilles impaires :

### 3-a) Cas de la grille 3 × 3 :

Nous nous sommes ensuite intéressées au cas des grilles impaires.
De façon générale, nous avons remarqué que pour une grille $n \times n$, les sommes à obtenir sur les lignes et les colonnes ne pouvaient prendre que $2n+1$ valeurs, pour $2n$ sorties possibles.

Par exemple, pour une grille 2 × 2, il y a 4 sorties (2 en lignes et 2 en colonnes) et 5 valeurs possibles : –2, –1, 0, 1 et 2.
Pour une grille 3 × 3, il y a 6 sorties (3 en lignes et 3 en colonnes) et 7 valeurs possibles : –3, –2, –1, 0, 1, 2 et 3.

Cherchons une grille gagnante 3 × 3. Supposons qu'on a 3 en sortie sur la première ligne. L'ordre des lignes n'a pas d'importance et on peut choisir de mettre le 3 en ligne ou en colonne.
On ne peut pas avoir –3 en sortie en colonne car la seule façon d'obtenir –3 est d'avoir trois –1.
Si on a 3 et –3 en sortie, ils sont tous les deux en ligne.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 |
| -1 | -1 | -1 | -3 |
| | | | |

Cela ne peut pas donner une grille gagnante. En effet, si on met des chiffres différents dans la ligne libre (donc –1, 0 et 1), la somme de cette ligne sera égale à 0 mais la colonne (1, –1, 0) aura aussi pour somme 0. Si on répète deux fois le même chiffre dans la ligne libre, on se retrouvera avec deux colonnes identiques.

Une grille gagnante doit donc avoir en sortie soit 3, soit –3, mais pas les deux en même temps.
On peut supposer que c'est le 3, quitte à changer tous les signes dans la grille.
Nous retirons la valeur –3 dont toutes les autres valeurs (–2, –1, 0, 1 et 2) doivent être utilisées en sortie.

En particulier, une grille gagnante 3 × 3 a donc forcément en sortie les nombres 2 et –2.
La seule façon d'obtenir 2 est d'additionner 1, 1 et 0.
La seule façon d'obtenir –2 est d'additionner –1, –1 et 0.
On a donc trois cas de grilles différentes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| -1 | | | |
| -1 | | | |
| -2 | | | |

Cas n° 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| 0 | -1 | -1 | -2 |
| | | | |

Cas n° 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| -1 | -1 | 0 | -2 |
| | | | |

Cas n° 3

*Analyse du cas n° 1 :*
La seule façon d'obtenir 3 est de compléter une colonne avec des 1 uniquement :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| -1 | 1 | | |
| -1 | 1 | | |
| -2 | 3 | ? | |

Il y a trois possibilités pour la somme de la troisième colonne : 1, 0 ou –1.

**(i)** Si la somme de la troisième colonne vaut 1, alors on a deux possibilités pour les deux cases vides dont la somme doit être égale à 0 : 0 et 0 ou bien 1 et –1 mais aucune des deux ne convient car on aurait deux sorties qui la même valeur.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| -1 | 1 | 0 | 0 |
| -1 | 1 | 0 | 0 |
| -2 | 3 | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| -1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | 1 | -1 | -1 |
| -2 | 3 | 1 | |

**(ii)** Si la somme de la troisième colonne vaut 0, alors les deux cases vides contiennent un 0 et un –1 mais cela ne convient pas non plus car 0 apparaîtrait deux fois en sortie.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| -1 | 1 | 0 | 0 |
| -1 | 1 | -1 | -1 |
| -2 | 3 | 0 | |

**(iii)** Si la somme de la troisième colonne vaut –1, alors les deux cases vides contiennent deux –1 mais cela ne convient pas non plus car –1 apparaîtrait trois fois en sortie.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| -1 | 1 | -1 | -1 |
| -1 | 1 | -1 | -1 |
| -2 | 3 | -1 | |

*Analyse du cas n° 2 :*
La seule façon d'obtenir 3 est de compléter une ligne avec uniquement des 1.
On obtient alors trois fois la même valeur en sortie, ce qui ne convient pas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| 0 | -1 | -1 | -2 |
| 1 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | |

*Analyse du cas n° 3 :*
La seule façon d'obtenir 3 est de compléter une ligne avec uniquement des 1 :
On obtient alors deux fois la valeur 2 en sortie, ce qui ne convient pas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| -1 | -1 | 0 | -2 |
| 1 | 1 | 1 | 3 |
| 0 | 1 | 2 | |

**Conclusion :** Il n'y a pas de grille gagnante 3 × 3.

### 3-b) Cas de la grille 5 × 5 :

Tout d'abord, nous avons remarqué que sur une grille, la somme de toutes les sorties en colonne et la somme de toutes les sorties en ligne sont égales à la somme de toutes les cases de la grille.
La somme de toutes les sorties est donc paire car c'est deux fois la somme de toutes les cases.

Pour construire une grille gagnante 5 × 5 il faut choisir 10 sorties parmi les onze valeurs : –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 et 5.
On ne peut pas enlever 5 car dans ce cas-là, la somme de toutes les sorties est impaire (elle vaut –5).
On a le même problème avec –5.
Il faut donc placer les valeurs 5 et –5 sur des sorties.
Si 5 est en ligne, –5, qui s'obtient uniquement avec des –1, ne peut pas être en colonne.
On part donc de la situation suivante :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Quitte à changer les signes, on peut supposer qu'on a une sortie égale à 4.
Il n'est plus possible d'obtenir un 4 en colonne donc le 4 est forcément en ligne. On a donc :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| | | | | | |
| | | | | | |

Deux cas se présentent : soit on a –4 dans les sorties, soit on ne l'a pas.

*Analyse du premier cas : avec –4 dans les sorties :*

Il n'est plus possible d'obtenir un –4 en colonne donc le –4 est forcément en ligne.
On a alors deux situations possibles :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -4 |
| | | | | | |

Situation n° 1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -4 |
| | | | | | |

Situation n° 2

Dans la situation n° 1, les quatre dernières colonnes ne peuvent avoir une sortie égale qu'à –1, 0 ou 1 donc il y en aura deux identiques.
Dans la situation n° 2, les trois dernières colonnes doivent être différentes, ce qui amène à la situation suivante :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -4 |
| | | -1 | 0 | 1 | |
| | | -1 | 0 | 1 | |

Il est alors impossible d'obtenir un 3 ou un –3 en sortie alors qu'il en faudrait au moins l'un des deux.

*Analyse du deuxième cas : sans –4 dans les sorties :*

On doit remplir la grille suivante :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| | | | | | |
| | | | | | |

Dans ce cas, les sorties restantes sont forcément –3, –2, –1, 0, 1, 2 et 3.
On sait que la somme de toutes les sorties est $-5 + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 4$.
La somme des sorties en ligne et la somme des sorties en colonne sont donc chacune égales à 2.
La somme des deux sorties manquantes en ligne vaut donc –2.
Les deux sorties manquantes en ligne sont donc soit –3 et 1 soit –2 et 0.
On ne peut pas obtenir –3 en colonne donc on doit l'obtenir en ligne.
Ainsi, les deux sorties manquantes en ligne sont forcément –3 et 1.
Il faut obtenir la sortie 3 en colonne, ce qui ne peut se faire que d'une seule façon :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| | | | | 1 | -3 |
| | | | | 1 | 1 |
| | | | | 3 | |

Il n'y a alors plus qu'une seule façon d'obtenir la sortie –3 en ligne :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -3 |
| | | | | 1 | 1 |
| | | | | 3 | |

Il n'est alors plus possible d'obtenir la sortie 2 en colonne.

**Conclusion :** Il n'y a pas de grille gagnante $5 \times 5$.

### 3-c) Cas de la grille 7 × 7 :

Pour construire une grille gagnante 7 × 7 il faut choisir 14 sorties parmi les 15 valeurs suivantes :

–7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

Comme on l'a déjà vu pour le cas des grilles 5 × 5, la somme de toutes les sorties est paire car c'est deux fois la somme de toutes les cases.
Comme la somme des 15 valeurs énumérées ci-dessus est paire, il faudra retirer une valeur paire.
Quitte à changer les signes, la valeur à retirer est donc 0, –2, –4 ou –6.
Dans la suite, nous allons traiter ces quatre cas les uns après les autres.

On peut supposer que la sortie égale à 7 est obtenue en ligne. Cela impose d'obtenir également la sortie –7 en ligne, puis la sortie 6 en ligne également.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

#### *3-c-1) Cas où la valeur retirée est 0 :*

Dans cette situation, la somme des sorties en ligne et la somme des sorties en colonne doivent toutes les deux être égales à 0.
Il nous faut obtenir –6 en sortie et cela n'est possible qu'en ligne :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -6 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

Configuration 3c1-a

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -6 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

Configuration 3c1-b

Il n'est alors plus possible d'obtenir les sorties 5 ou –5 en colonne ; on les obtiendrait donc en ligne.
Ainsi, on aurait en ligne les sorties 7, –7, 6, –6, 5 et –5. Or la somme des sorties en ligne doit être égale à 0 et la dernière sortie en ligne ne peut pas être égale à 0 puisque c'est la valeur retirée dans ce cas.
On ne peut donc pas trouver de grille gagnante 7 × 7 dans ce cas.

***3-c-2) Cas où la valeur retirée est –2 :***

Dans cette situation, la somme des sorties en ligne et la somme des sorties en colonne doivent toutes les deux être égales à 1.
Comme dans le cas précédent (§ 3-c-1), les sorties 7, –7, 6, –6, 5 et –5 sont en ligne. La dernière sortie en ligne est donc égale à 1.
Les sorties à placer en colonne sont donc 4, –4, 3, –3, 2, –1 et 0 (dont la somme vaut bien 1).

On retrouve les deux configurations 3c1-a et 3c1-b pour obtenir la sortie égale à –6.
Dans la configuration 3c1-a, il n'est pas possible d'obtenir les sorties 4 ou –4 en colonne.
On continue donc avec la configuration 3c1-b.
On place les sorties 4 et –4 en colonne, puis les sorties 3 et –3 en colonne aussi.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -6 |
| -1 | 1 | 1 | -1 | | | | |
| -1 | 1 | 1 | -1 | | | | |
| -1 | 1 | 1 | -1 | | | | |
| -4 | 4 | 3 | -3 | | | | |

On s'aperçoit alors qu'il n'est plus possible d'obtenir la sortie 5 en ligne.
On ne peut donc pas trouver de grille gagnante 7 × 7 dans ce cas.

***3-c-3) Cas où la valeur retirée est –4 :***

Dans cette situation, la somme des sorties en ligne et la somme des sorties en colonne doivent toutes les deux être égales à 2.
Comme dans le cas précédent (§ 3-c-1), les sorties 7, –7, 6, –6, 5 et –5 sont en ligne. La dernière sortie en ligne est donc égale à 2.
Les sorties à placer en colonne sont donc 4, 3, –3, –2, –1, 1 et 0 (dont la somme vaut bien 2).

On retrouve les deux configurations 3c1-a et 3c1-b pour obtenir la sortie égale à –6.
Dans la configuration 3c1-a, il n'est pas possible d'obtenir la sortie 4 en colonne.
On continue donc avec la configuration 3c1-b.
Le choix de la colonne permettant d'obtenir la sortie 4 est imposé.
La façon d'obtenir la sortie –5 en ligne s'impose aussi alors.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -6 |
| -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| | 1 | | | | | | |
| | 1 | | | | | | |
| | 4 | | | | | | |

On constate alors qu'il n'est plus possible d'obtenir la sortie 3 en colonne.
On ne peut donc pas trouver de grille gagnante 7 × 7 dans ce cas.

### *3-c-4) Cas où la valeur retirée est –6 :*

Dans cette situation, la somme des sorties en ligne et la somme des sorties en colonne doivent toutes les deux être égales à 3.
Comme dans les cas précédents, si on choisit d'obtenir la sortie 7 en ligne, il en est de même pour les sorties –7, 6 puis –5.
On comptabilise alors 10 situations permettant d'obtenir une somme des sorties en ligne (et en colonne) égale à 3 :

- Situation n° 1 : 7, –7, 6 , –5 et 5, 0, –3
- Situation n° 2 : 7, –7, 6 , –5 et 5, –1, –2
- Situation n° 3 : 7, –7, 6 , –5 et 5, 1, –4
- Situation n° 4 : 7, –7, 6 , –5 et 4, 2, –4
- Situation n° 5 : 7, –7, 6 , –5 et 4, 1, –3
- Situation n° 6 : 7, –7, 6 , –5 et 4, 0, –2
- Situation n° 7 : 7, –7, 6 , –5 et 3, 2, –3
- Situation n° 8 : 7, –7, 6 , –5 et 3, 1, –2
- Situation n° 9 : 7, –7, 6 , –5 et 3, 0, –1
- Situation n° 10 : 7, –7, 6 , –5 et 2, 1, –1

*i) <u>Peut-on obtenir la sortie 5 en colonne ?</u>*

Il y a 4 dispositions permettant d'obtenir la sortie –5 en ligne.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Disposition n° 1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Disposition n° 2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| -1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Disposition n° 3

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Disposition n° 4

Parmi ces 4 dispositions, seule la disposition n° 3 permettrait d'obtenir la sortie 5 en colonne.
On se retrouve avec la grille suivante :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| | 1 | | | | | | |
| | 1 | | | | | | |
| | 1 | | | | | | |
| -1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

On s’aperçoit alors qu’il n’est pas possible d’obtenir la sortie 4 en colonne. La sortie 4 serait donc obtenue en ligne.
Parmi les 10 situations énumérées au début du paragraphe 3-c-4, seules les situations n° 4, n° 5 et n° 6 sont donc à prendre en compte.

• Étude de la situation n° 4 :
Les sorties en ligne sont 7, –7, 6 , –5 et 4, 2, –4.
Les sorties en colonne sont 5, 1, 0, –1, –2 et –3.
La sortie 3 en colonne impose de placer de nouveaux 1 dans la grille et cela pose alors problème pour obtenir la sortie –4 en ligne.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| | 1 | 1 | | | | | 4 |
| | 1 | 1 | | | | | 2 |
| | 1 | 1 | | | | | -4 |
| -1 | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Cette situation ne permet donc pas d’obtenir de grille gagnante 7 × 7.

• Étude de la situation n° 5 :
Les sorties en ligne sont 7, –7, 6 , –5 et 4, 1, –3.
Les sorties en colonne sont 5, 3, –4, 0, –1, –2 et 2.
Les façons d’obtenir les sorties 3 et –4 en colonne sont imposées.
Ce sont alors les façons d’obtenir les sorties 4 et –3 en ligne qui s’imposent.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| -1 | 1 | 1 | | | | | 1 |
| -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -3 |
| -4 | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 | -1 | |

On s’aperçoit alors qu’il n’est plus possible d’obtenir la sortie 2 en colonne.
Cette situation ne permet donc pas d’obtenir de grille gagnante 7 × 7.

• Étude de la situation n° 6 :
Les sorties en ligne sont 7, –7, 6 , –5 et 4, 0, –2.
Les sorties en colonne sont 5, 3, –4, 1, –1, –3 et 2.
Les façons d’obtenir les sorties –4, 3 puis –3 en colonne s’imposent.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -5 |
| -1 | 1 | 1 | -1 | | | | 4 |
| -1 | 1 | 1 | -1 | | | | 0 |
| -1 | 1 | 1 | -1 | | | | -2 |
| -4 | 5 | 3 | -3 | 0 | 0 | 0 | |

On s'aperçoit alors qu'il n'est plus possible d'obtenir la sortie 4 en ligne.
Cette situation ne permet donc pas d'obtenir de grille gagnante 7 × 7.

Finalement, aucune des situations où la sortie 5 est en colonne ne permet d'aboutir.

*ii) Avec la sortie 5 en ligne :*

Parmi les 10 situations énumérées au début du paragraphe 3-c-4, seules les situations n° 1, n° 2 et n° 3 sont à prendre en compte.
Il y a deux façons d'obtenir une sortie égale à 5 : avec la somme 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 et avec la somme 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + (–1). Dans les deux cas, il faut au moins 5 fois le nombre 1.
On repart donc maintenant de la grille suivante :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

• Étude de la situation n° 1 :
Les sorties en ligne sont 7, –7, 6 , –5 et 5, 0, –3.
Les sorties en colonne sont –4, 4, 3, –2, 2, –1 et 1.
La sortie –4 est imposée en colonne et ceci impose ensuite le remplissage de la ligne du 5.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | | | | | | | |
| -1 | | | | | | | |
| -1 | | | | | | | |
| -4 | | | | | | | |

On s'aperçoit alors qu'on ne peut pas avoir la sortie –2 en colonne.
Cette situation ne permet donc pas d'obtenir de grille gagnante 7 × 7.

• Étude de la situation n° 2 :

Les sorties en ligne sont 7, –7, 6 , –5 et 5, –1, –2.
Les sorties en colonne sont –4, 4, –3, 3, 2, –1,  et 0.
La sortie –4 est imposée en colonne et ceci impose ensuite le remplissage de la ligne du 5.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | | | | | | | |
| -1 | | | | | | | |
| -1 | | | | | | | |
| -4 | | | | | | | |

On s'aperçoit alors qu'on ne peut pas avoir la sortie –3 en colonne.
Cette situation ne permet donc pas d'obtenir de grille gagnante 7 × 7.

• Étude de la situation n° 3 :

Les sorties en ligne sont 7, –7, 6 , –5 et 5, 1, –4.
Les sorties en colonne sont 4, –3, 3, –2, 2, –1,  et 0.

Il y a 4 dispositions permettant d'obtenir la sortie 5 en ligne.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |

Disposition n° 1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | |

Disposition n° 2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |

Disposition n° 3

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| -1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |

Disposition n° 4

Dans la disposition n° 2, il n'est pas possible d'obtenir la sortie –3 en colonne.
Dans les dispositions n° 1 et n° 3, le choix de la colonne pour la sortie –3 est imposé.
C'est ensuite le choix de la colonne pour la sortie –2 qui s'impose.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | | | | | | |
| -1 | -1 | | | | | | |
| -1 | -1 | | | | | | |
| -3 | -2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |

Disposition n° 1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | | | | | | |
| -1 | -1 | | | | | | |
| -1 | -1 | | | | | | |
| -2 | -3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |

Disposition n° 3

Pour les deux dispositions, il reste alors 5 colonnes identiques.
Il faut alors placer la sortie –1 en colonne.
Cela impose alors la façon d'obtenir la sortie 1 en ligne.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | -1 | | | | | |
| -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | -1 | -1 | | | | | |
| -3 | -2 | -1 | 3 | 3 | 3 | 3 | |

Disposition n° 1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| -1 | -1 | -1 | | | | | |
| -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | -1 | -1 | | | | | |
| -2 | -3 | -1 | 3 | 3 | 3 | 3 | |

Disposition n° 3

On constate alors qu'il n'est plus possible d'obtenir la sortie 0 en colonne pour aucune des deux dispositions.

Il ne reste finalement que la disposition n° 4.
Le choix de la colonne pour la sortie –3 est imposé (mais pas la façon de la remplir).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -7 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| ? | | | | | | | |
| ? | | | | | | | |
| ? | | | | | | | |
| -3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |

Disposition n° 4

On s'aperçoit alors qu'il n'est plus possible d'obtenir la sortie –2 en colonne.

Cette situation ne permet donc pas d'obtenir de grille gagnante $7 \times 7$.

**Conclusion :** Il n'y a pas de grille gagnante $7 \times 7$.

## 4) Conclusions :

Nous avons démontré qu'il existe des grilles gagnantes $n \times n$ pour $n$ pair.
Nous avons démontré qu'il n'existe pas de grilles gagnantes $n \times n$ pour $n$ égal à 1, 3, 5 ou 7.
Nous conjecturons qu'il n'existe pas de grilles gagnantes $n \times n$ pour $n$ impair mais notre méthode devient de plus en plus difficile à suivre donc il faudrait peut-être chercher une autre piste.