Géométribourg

Année 2024– 2025

Laurent Anaé – élève en 3ème.

Établissement(s) : collège Edmond de Goncourt - Pulnoy

Enseignantes : Mme KIEFFER-PFLAUM Violaine et Mme BOUTI Salima

Chercheuses : DECKER Amandine et COUSIN Marie (LORIA -Université de Lorraine)

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Au 15ème siècle, la ville de Géométribourg avait un drôle de seigneur. Sire Point-Carré, le seigneur de Géométribourg, était un peu fou, et imposait une taxe sur la surface vitrée des maisons de la ville. il imposait également que toutes les fenêtres de Géométribourg soient triangulaires et composées exclusivement de triangles !

A cette époque-là, les fenêtres étaient faites de bois et de verre, ou de métal et de verre pour les sujets les plus riches. Les architectes de Géométribourg, se sont donc retrouvés avec des demandes bien spécifiques. En effet, pour construire une telle fenêtre, il faut découper un triangle dans le mur, agencer les triangles en verres à l'intérieur de ce trou, et les fixer avec des barres de bois ou de métal. Certains sujets de Sire Point-Carré demandaient aussi à agrandir leurs fenêtres, ce qui compliquait beaucoup la tâche....elles devaient en effet rester constituées de triangles uniquement ! Alors, Numérobis, architecte à Géométribourg, a eu une idée révolutionnaire !

- Une fenêtre triangulaire doit avoir les trois côtes égaux (pour satisfaire Sire Point-Carré qui trouve ça plus joli),
- Si on veut une très grande fenêtre, on garde le trou creusé tel quel :

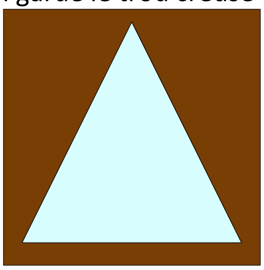


Figure 1: une grande fenêtre triangulaire du départ.

- Si on veut bien se faire voir (parce qu'on a des belles fenêtres) et payer une plus petite taxe, on va vouloir réduire sa surface vitrée. Pour cela, on utilise l'idée de Numérobis :

Une fenêtre peut se découper en 4 triangles identiques, en traçant les droites qui relient les milieux de chacun des segments entre eux. On vitre les trois triangles des sommets, et on bouche (avec du bois ou du métal, selon la préférence et les moyens des sujets) le triangle du milieu :

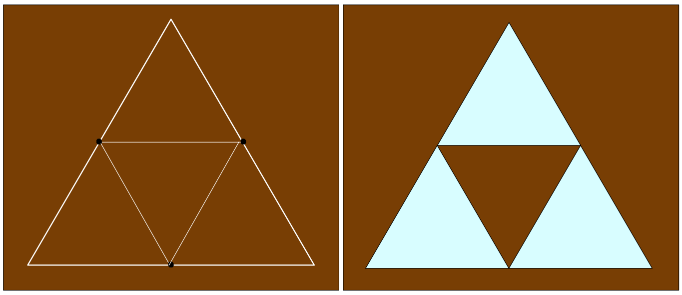


Figure 2:réduction de la surface vitrée par la méthode de Numérobis

- Si on veut payer encore moins de taxes, on recommence dans chacun des nouveaux triangles vitrés. Il ne faut pas oublier que Sire Point-Carré est un peu fou, tous les triangles en verre doivent avoir la même taille (sinon Sire Point-Carr ne trouve pas ça joli).

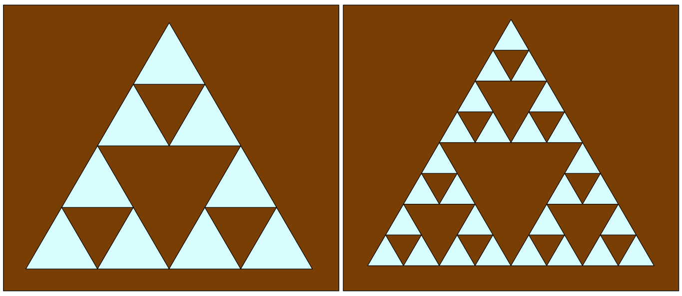
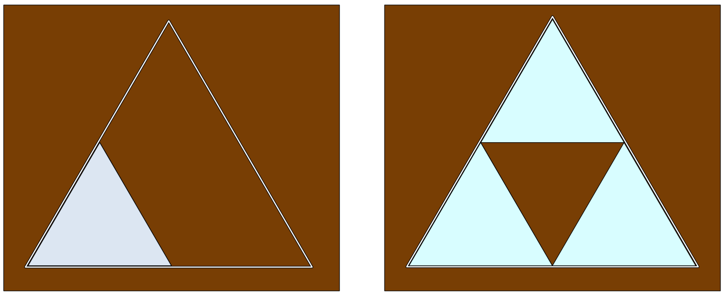


Figure 3:une suite de réduction de la surface vitrée par Numérobis

- Si on a déjà une belle fenêtre mais qu'on veut une fenêtre plus grande, on peut utiliser l'autre partie de l'idée de Numérobis : on creuse un trou 4 fois plus grand que sa fenêtre dans le mur (chaque côté du trou est deux fois plus long que l'ancien côté de sa fenêtre), et on réplique son ancienne fenêtre deux fois. On a alors trois anciennes fenêtres, qu'on va venir fixer dans chacun des coins du nouveau trou, en bouchant le trou central avec du bois ou du métal.



L'idée de Numérobis est très appréciée et a beaucoup de succès. Mais il voudrait bien pouvoir estimer la surface vitrée de ses fenêtres facilement car les sujets lui demandent tout le temps combien de taxes ils devront payer !

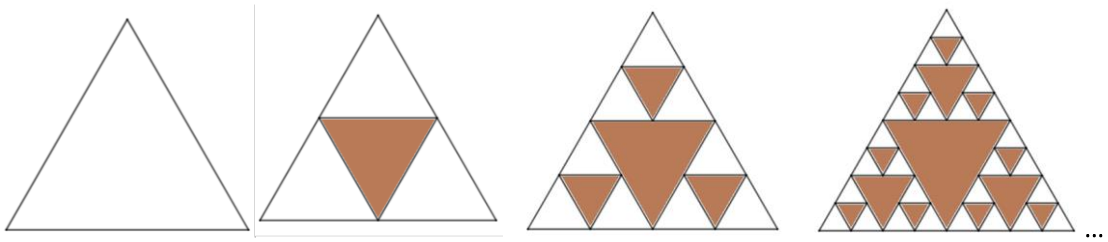
Pour tenter de répondre à cette question, j'ai proposé les recherches suivantes :

1.2. Les pistes de recherches

Dans ce problème, on se trouve face à deux possibilités :

- Découper une fenêtre en 4 parties dont celle du centre sera en bois
- Agrandir en doublant la longueur du côté de la fenêtre

1.2.1. Découpage (verre)



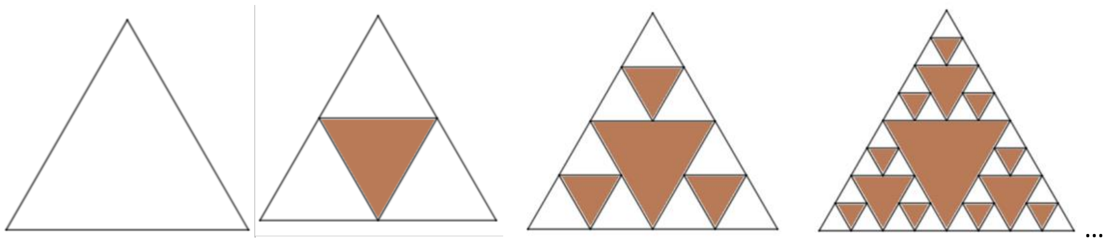
Si x est le prix du départ

Le prix du premier découpage sera $\frac{3}{4}\boldsymbol{x}$ **.**

Le prix du second découpage sera $\frac{9}{16}\boldsymbol{x}$ **.**

Le prix du troisième découpage sera $\frac{27}{64}\boldsymbol{x}$ **.**

Ce qui peut s’écrire sous forme



Si x est le prix du départ

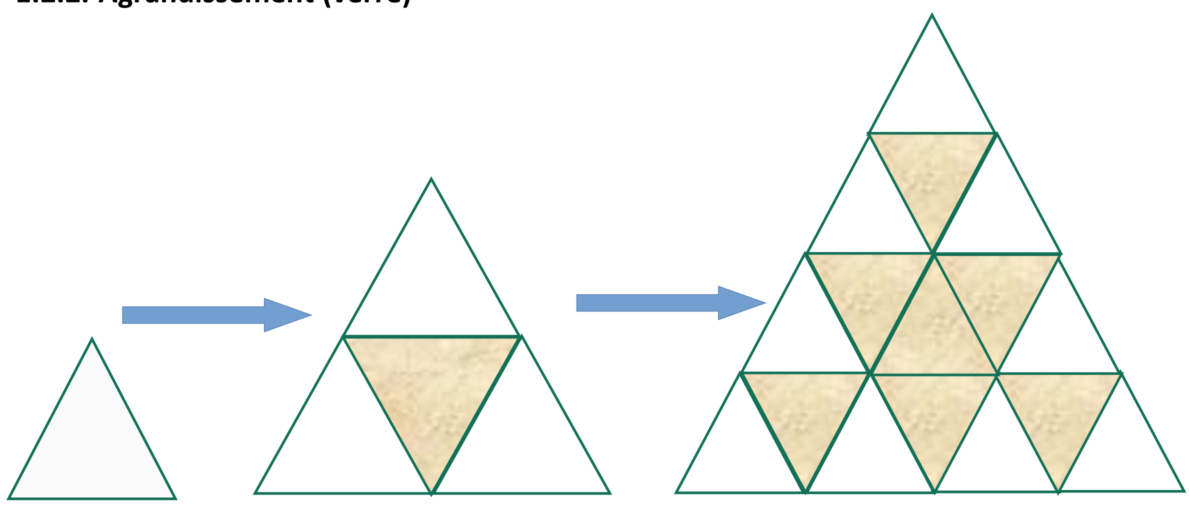
Le prix du **premier** découpage sera $(\frac{3}{4})^1\boldsymbol{x}$ **.**

Le prix du **second** découpage sera $(\frac{3}{4})^2\boldsymbol{x}$ **.**

Le prix du **troisième** découpage sera $(\frac{3}{4})^3\boldsymbol{x}$ **.**

Nous pouvons conjecturer que le nième découpage coutera $(\frac{3}{4})^n\boldsymbol{x}$**,** où **n** est le nombre de **découpage**

1.2.2. Agrandissement (verre)

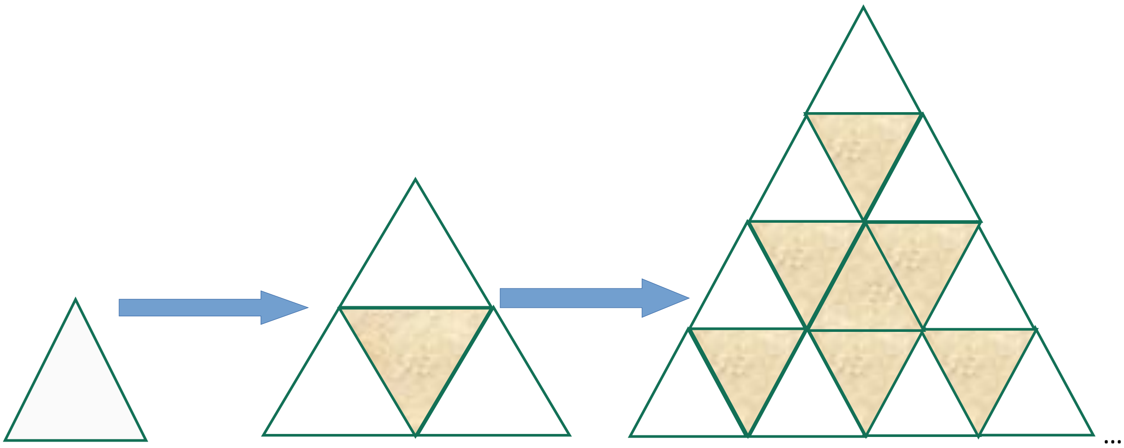


Si x est le prix du départ

Le prix du **premier** agrandissement est : $x \times 3$

Le prix du **second** agrandissement est : $x \times 9$

Qu’on peut écrire sous forme :



Si x est le prix du départ

Le prix du **premier** agrandissement est : $x \times 3^1$

Le prix du **second** agrandissement est : $x \times 3^2$

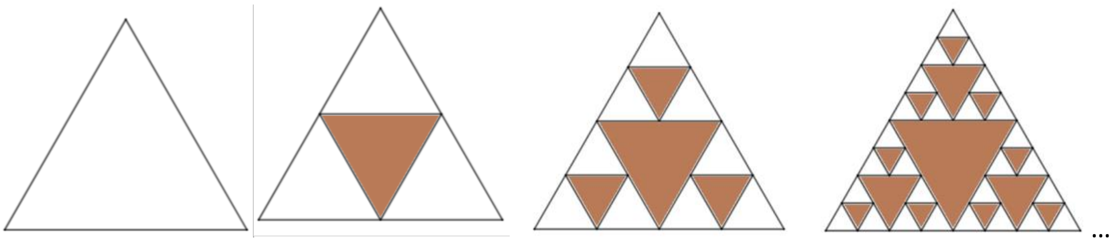
Nous pouvons conjecturer que le nième découpage coutera $\boldsymbol{x^n}$, où **n** est le nombre **d'agrandissement**

1.2.3. Découpage (bois)

Comme nous cherchons ici la surface qui n'est pas vitrée, nous cherchons donc le reste après vitrage, soit :

- 4-3=1, donc $\frac{1}{4}$pour le 1er découpage
- 16-9=7, donc $\frac{7}{16}$pour le 2ème découpage ….

Il faut donc d'abord, pour calculer la surface du bois, calculer la surface vitrée suivant le nombre de découpage et soustraire de numérateur au dénominateur et le multiplier au prix du bois pour une fenêtres complète :



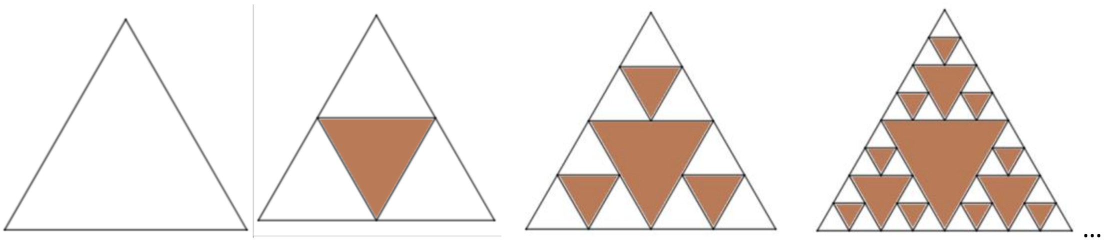
La fenêtre du départ

La surface en bois est de $\frac{1}{4}$

$\frac{7}{16}$

$\frac{37}{64}$

Nous pouvons écrire ces résultats comme :



La fenêtre du départ

$\boxed{\dfrac{4^1 - 3^1}{4^1}}$

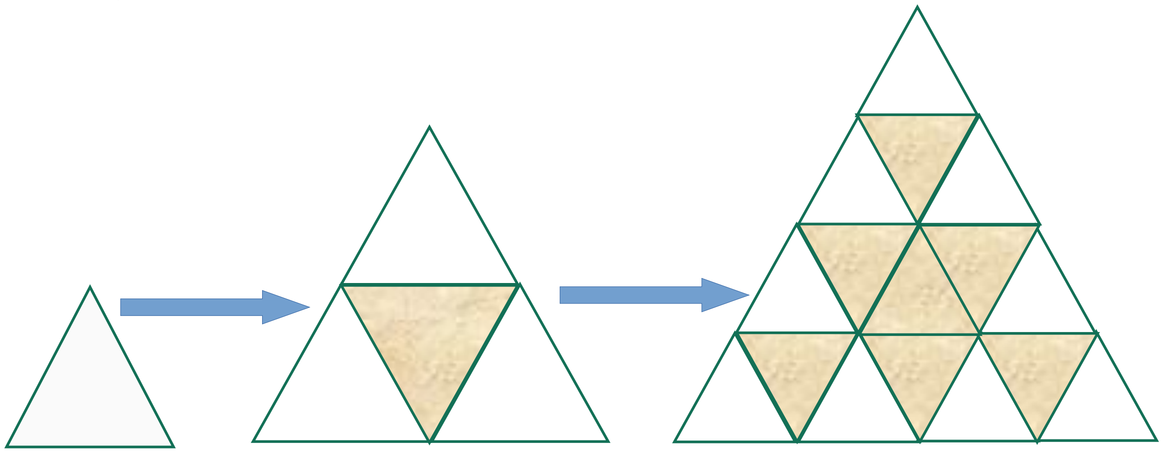
$\frac{4^2 - 3^2}{4^2}$

$\frac{4^3 - 3^3}{4^3}$

Nous pouvons conjecturer qu'au nième découpage, la surface du bois sera de $\frac{\mathbf{4^n-3^n}}{\mathbf{4^n}}$ où **n** est le nombre **découpage.** Il suffira de la soustraire à l'unité afin de retrouve surface vitrée, puis multiplier celle-ci par le prix.

1.2.4. Agrandissement (bois)

Ici, c'est également la surface du bois qui est recherchée :



La fenêtre du départ

La surface en bois après le premier agrandissement est : $4^1 - 3^1$

La surface en bois après le second agrandissement est : $4^2 - 3^2$

…

Nous pouvons conjecturer qu'au nième agrandissement, la surface du bois sera de $\boldsymbol{4^n} - \boldsymbol{3^n}$**.** Où n est ne nombre d'agrandissement de la fenêtre du départ

2. Conclusion

Le calcul du prix des surfaces vitrées sera le même par la méthode de calcul directe de la surface vitrée ou en calculant d'abord la surface couverte.
Ayant travaillé toute l'année sur ce découpage proposé par Numérobis, j'ignorais qu'il s'agissait d'un découpage particulièrement connu chez les mathématiciens : les triangles de Sierpinsky où interviennent les fractales (répétition infini du même motif). Dans ce type de figure, apparaissent les calculs avec les **puissances n**, où n est le nombre de répétition.