Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Les Circuits électriques

Année 2023-2024

Valentin François, Hocine Djattit, Nourdine Djattit,
élèves en classe de Première

Etablissement : Lycée Claude Gellée (Épinal)
Enseignants : Delphine Cosson, Christine Vonthron
Chercheur : Julien Bernat (Université de Lorraine)

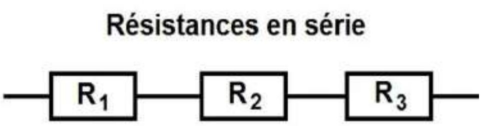
Présentation du sujet

On dispose d'une très grande collection de résistances qui sont toutes identiques (1ohm). Pour fabriquer de nouvelles sortes de résistances, on peut soit placer des résistances en série, ou bien en parallèle.

1) Quelles valeurs de résistances peuvent être obtenues avec nos résistances de 1 ohm ?
2) Est-il possible de fabriquer une résistance qui aurait pour valeur 69/17 ohm ?
3) Si oui, comment utiliser le moins de résistances et quel est ce minimum ?

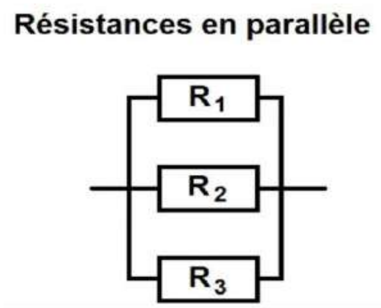
Les formules à connaître

Calculs de résistance (en ohm) pour des résistances branchées en série



$$R_1 + R_2 + R_3 = R \text{ (totale)}$$

Calculs de résistance (en ohm) pour des résistances branchées en parallèle [1]



$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Testons maintenant plusieurs montages avec un nombre défini de résistances branchées de manière parallèle :

- Avec 2 résistances $R_1 = 1 \text{ ohm}$ et $R_2 = 1 \text{ ohm}$

$$\frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 \times 1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

- Avec 3 résistances, on prend le groupe des deux premières de résistance globale $R = \frac{1}{2} \text{ohm}$, on met $R_3 = 1 \text{ ohm}$ en parallèle :

$$\frac{R \times R_3}{R + R_3} + \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

- Avec 4 résistances, on prend le groupe des trois premières de résistance globale $R' = \frac{1}{3} \text{ohm}$, on met $R_4 = 1 \text{ ohm}$ en parallèle :

$$\frac{R' \times R_4}{R' + R_4} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Conjecture

Nous observons alors qu'à chaque fois que l'on rajoute une résistance, on ajoute 1 au dénominateur. Essayons de démontrer cela par récurrence.

Preuve par récurrence

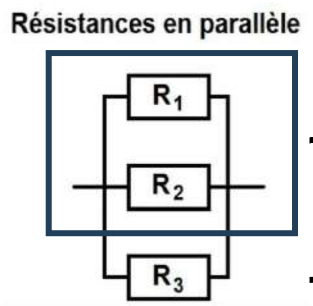
Nous allons démontrer que si on prend n résistances (en parallèles) de 1 ohm, la résistance globale R_n est de $\frac{1}{n}$ ohm.

Initialisation : si on a 1 résistance, on a bien une résistance de 1 ohm.

$$R_1 = \frac{R_1}{R_1} = \frac{1}{1} = 1$$

Hérédité : on suppose qu'avec un certain nombre n de résistances branchées en parallèles, on obtient $1/n \text{ ohm}$.

On va donc montrer qu'avec $n+1$ résistances, on va obtenir une résistance totale de $1/(n+1)$ ohm.



Bloc de n résistances de 1 ohm qui correspond à $R_n = \frac{1}{n} \text{ ohm}$

Nouvelle résistance de 1 ohm.

$$R_{n+1} = \frac{\frac{1}{n} \times 1}{\frac{1}{n} + 1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1+n}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, on a prouvé par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, un bloc de n résistances de 1 ohm en parallèle aura une résistance globale de $1/n \text{ ohm}$.

Quels nombres est-il possible de construire avec ces principes ?

Ainsi, en branchant parallèlement des résistances de 1 ohm, on peut obtenir tous les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{1}{n}$.
En branchant en série des résistances de 1 ohm, on peut obtenir tous les nombres entiers naturels ($\mathbb{N}^*$).
Nous pouvons donc obtenir n'importe quel nombre qui puisse s'écrire sous la forme

$$x + \frac{1}{n}$$

(x appartenant à $\mathbb{N}$, n appartenant à $\mathbb{N}^*$) [2]

Exemple :
Prenons par exemple le nombre $\frac{21}{20}$
Il peut s'écrire sous la forme : $\frac{20}{20} + \frac{1}{20} = 1 + \frac{1}{20}$
Donc nous pouvons avoir cette valeur de résistance (avec des résistances de 1 ohm).

Une autre méthode : la division euclidienne

Prenons le même exemple que ci-dessus soit $\frac{21}{20}$.

Faisons la division euclidienne ; nous obtenons un quotient égal à 1, un reste égal à 1 et un diviseur égal à 20.

Le quotient est donc notre x, le diviseur notre n et notre reste est 1.

Est-il possible de fabriquer une résistance qui aurait pour valeur $69/17 \text{ ohm}$?

$$\frac{69}{17} = \frac{68}{17} + \frac{1}{17} = 4 + \frac{1}{17}$$

D'après cette démonstration nous pouvons bien fabriquer une telle résistance.

Si oui, comment utiliser le moins de résistances et quel est ce minimum ?

1er modèle (sans optimisation)

Nous pouvons fabriquer 69 fois une colonne de 17 résistances (qui a donc pour valeur $1/17 \text{ ohm}$) branchées en série. Nous obtenons bien alors une résistance totale de $69/17 \text{ ohm}$. ($69\ x\ (1/17) = 69/17$)

2ème modèle (avec optimisation)

D'après notre démonstration précédente, nous pouvons simplifier $69/17$ par ceci : $4 + (1/17)$. Il nous suffit alors de brancher 4 résistances en série (ayant pour valeur totale 4 ohm) puis de brancher 17 résistances en parallèle (ayant pour valeur $1/17$). Nous obtenons alors bien la valeur voulue.

NOTES DE L'ÉDITION

[1] Dans le calcul des résistances en parallèle, on utilise souvent la formule $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, qui est équivalente à celle donnée ci-dessous, mais qui simplifie les calculs. Cette formule peut être généralisée à n résistances $R_1, R_2, \dots, R_n$, en obtenant $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}$. Dans le cas particulier où $R_1 = R_2 = \dots = R_n = 1$, on a $\frac{1}{R} = n$, d'où découle le résultat trouvé plus loin.

[2] Ce résultat est incomplet. La forme générale du type de résistances constructibles est $x + \frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k}$. Les fractions de la forme $\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k}$ avec des dénominateurs n_i tous positifs et distincts, sont appelées **fractions égyptiennes** (https://fr.wikipedia.org/wiki/Fraction_%C3%A9gyptienne). On peut démontrer que toute fraction positive peut être écrite sous la forme d'une fraction égyptienne. On peut donc conclure que toutes les résistances de valeur rationnelle peuvent être construites en combinant en série ou en parallèle des résistances de 1 ohm.

On pouvait arriver à la même conclusion sans faire intervenir les fractions égyptiennes. Plus loin dans le travail, on observe qu'une résistance de $\frac{69}{17}$ ohm peut être obtenue en mettant en série 69 résistances de $\frac{1}{17}$ ohm. De manière analogue, une résistance arbitraire de $\frac{h}{k}$ ohm peut être obtenue comme la somme de h résistances de $\frac{1}{k}$ ohm.